Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

Masterarbeit

Sen-Theorie semilinearer $\mathbb{C}_p$-Darstellungen

eingereicht: 11. September 2020

von: Kai Ekhard
Matrikelnummer: 2252138
geboren am 22. März 1989
in Oberhausen

Betreuer: Herr Prof. Dr. Jan Kohlhaase

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die Masterarbeit zum Thema *Sen-Theorie semilinearer* $\mathbb{C}_p$*-Darstellungen* unter der Betreuung von Prof. Dr. Jan Kohlhaase selbstständig verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, den 11.09.2020

Kai Ekhard

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Zielsetzung

Für eine Primzahl p sind die absolute Galoisgruppe $G_{\mathbb{Q}_p} = Gal\left(\overline{\mathbb{Q}_p} \mid \mathbb{Q}_p\right)$ oder allgemeiner, für eine endliche Erweiterung $K \mid \mathbb{Q}_p$ die Gruppe $G_K = Gal\left(\overline{K} \mid K\right)$ auch heute noch ein zentrales Objekt der modernen Zahlentheorie. Jedoch lassen sich diese Gruppen mit direkten Methoden nicht zufriedenstellend untersuchen. Ein durchaus etabliertes Vorgehen ist hier mit der Theorie p-adischer Galoisdarstellungen gegeben. Dabei lassen wir unsere Gruppe stetig in Form von linearen Operatoren auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum V wirken. Dies lässt sich als stetiger Gruppenhomomorphismus $\rho\colon G_K \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$ realisieren.

Als Kategorie $Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ aufgefasst sind diese Darstellungen jedoch noch äußerst schwer zu überblicken. Besserung verspricht allerdings das Studium gewisser Unterkategorien. Dies führt zum Begriff der Zulässigkeit. Dabei werden wir in dieser Arbeit speziell einer vorgegebenen linearen Darstellung (V, ρ) für einen bestimmten Erweiterungskörper $\mathbb{C}_K$ von K eine (nur noch) semilineare Darstellung $W = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ zuordnen. Dieser Schritt scheint auf den ersten Blick nicht sonderlich gewinnbringend zu sein. Shankar Sen konnte mithilfe des nach ihm benannten Sen-Operators ϕ_W jedoch einen starken Zusammenhang zwischen der linearen Darstellung V und der daraus entstehenden semilinearen Darstellung W herstellen [8].

Das Ziel dieser Arbeit wird die Ausarbeitung dieser von Sen entwickelten Theorie p-adischer Galoisdarstellungen sein. Dabei halten wir uns vorwiegend an das Preprint [2] von Jean-Marc Fontaine und Yi Ouyang.

Aufbau der Arbeit

Im ersten Kapitel beleuchten wir kurz und knapp die Theorie stetiger freier semilinearer Darstellungen einer topologischen Gruppe G über einem topologischen Ring B. Dazu zählt die Klassifikation sämtlicher solcher Darstellungen vom Rang d mittels der stetigen ersten Kohomologiegruppe $H^1_{cont}(G, GL_d(B))$. Zum Kapitelabschluss definieren wir den Begriff der B-Zulässigkeit und geben ein nützliches Kriterium für diese Eigenschaft.

Das zweite Kapitel beginnt mit der Konstruktion des Körpers $\mathbb{C}_K$ als Vervollständigung

eines algebraischen Abschlusses $\overline{K}$ einer endlichen Erweiterung K von $\mathbb{Q}_p$. Er ist in gewisser Weise als Analogon zu den komplexen Zahlen als algebraischer Abschluss der reellen Zahlen zu verstehen. Dabei und im weiteren Verlauf werden uns Krasners Lemma sowie das Theorem von Ax-Sen-Tate von großem Nutzen sein. Nachdem wir im ersten Kapitel den Zusammenhang zwischen semilinearen Darstellungen und Kohomologiegruppen studiert haben, bemühen wir uns nun um das Verständnis letzterer für $G = G_K = Gal\left(\overline{K} \mid K\right)$ und $B = \mathbb{C}_K$ und werden sehen, dass wir uns auf die Kohomologiegruppe $H^1_{cont}\left(\Gamma, GL_d\left(K_\infty\right)\right)$ zurückziehen dürfen. Dabei wird K_∞ eine total verzweigte Zwischenerweiterung von $\overline{K} \mid K$ und $\Gamma = Gal\left(K_\infty \mid K\right) \cong \left(\mathbb{Z}_p, +\right)$ (algebraisch und topologisch) sein.
Im dritten und letzten Kapitel definieren wir zunächst den bereits erwähnten Sen-Operator einer semilinearen Darstellung W von G_K über $\mathbb{C}_K$ und beweisen das Hauptresultat dieser Arbeit, um den Zusammenhang zwischen einer linearen p-adischen Darstellung V von G_K und der dadurch induzierten semilinearen Darstellung $W = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ mit zugehörigem Sen-Operator besser zu verstehen. Danach widmen wir unsere Aufmerksamkeit letztlich den $\mathbb{C}_K$-zulässigen p-adischen Darstellungen von G_K und geben ein Beispiel für eine nicht-$\mathbb{C}_K$-zulässige Darstellung von G_K.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich vorallem bei Herrn Prof. Dr. Kohlhaase für seine stetige Unterstützung und Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit bedanken. Des Weiteren gilt mein Dank meiner Freundin Anja Kronen und meinen Freunden Frederic Lefrançois sowie Jennifer und Manuel Bartz für den steten germanistischen Beistand. Letzterer ist hoffentlich nicht zu enttäuscht, dass ich mich in dieser Arbeit nicht mit den Geheimnissen der Zahl 8 auseinandergesetzt habe.

Notation und Vereinbarungen

Alle Isomorphien in dieser Arbeit, welche unendliche Galoisgruppen betreffen, sind stets als algebraisch und topologisch zu verstehen. Für einen nicht-archimedisch bewerteten Körper (F, v) seien $\mathcal{O}_F := \{a \in F \mid v(a) \geq 0\}$ der entsprechende Bewertungsring und $\mathfrak{m}_F := \{a \in \mathcal{O}_F \mid v(a) > 0\}$ das einzige maximale Ideal darin. Mit $\widehat{F}$ bezeichne dann die Vervollständigung von F bezüglich v.
Operiert eine Gruppe G auf einer Menge M, so bezeichne mit M^G stets die von allen $g \in G$ fixierten Elemente in M. Für einen Körper K und eine K-lineare Abbildung

$f \in Hom_K(V,W)$ mit endlichen K-Basen B_V und B_W bezeichne mit $M_{B_W}^{B_V}(f)$ die entsprechende Darstellungsmatrix.

2 Semilineare Darstellungstheorie

2.1 Freie semilineare B-Darstellungen

Für diesen Abschnitt seien B ein topologischer Ring und G eine (multiplikative) topologische Gruppe, welche stetig auf B operiert.

Definition 2.1. Eine freie semilineare B-Darstellung von G ist ein freier B-Modul V endlichen Ranges (versehen mit der Produkttopologie von B) ausgestattet mit einer stetigen und semilinearen G-Operation. Dabei heißt semilinear, dass für alle $g \in G$, $v, v_1, v_2 \in V$ sowie $\lambda \in B$ Folgendes gilt:

$$g\left(v_1 + v_2\right) = g\left(v_1\right) + g\left(v_2\right) \ ,$$
$$g\left(\lambda \cdot v\right) = g\left(\lambda\right) \cdot g\left(v\right) \ .$$

Schreibe auch $g \cdot v$ anstelle von $g\left(v\right)$.

Bemerkung 2.2 Ist $rang_B(V) = d$, so versehen wir V mit der Produkttopologie von B, indem wir eine Basis C von V über B wählen und den entsprechenden B-Isomorphismus

$$\phi_C \colon V \xrightarrow{\sim} B^d$$

als topologischen Isomorphismus auffassen, d.h. $U \subseteq V$ ist genau dann offen, wenn $\phi_C(U) \subseteq B^d$ offen ist. Ist nun C' eine weitere Basis von V, so definiert diese einen entsprechenden B-Isomorphismus

$$\phi_{C'} \colon V \xrightarrow{\sim} B^d \, ,$$

welcher V erneut mit einer Topologie versieht. Diese beiden Topologien stimmen jedoch überein. Definiere dafür $A := M_C^{C'}(id_V)$. Ist nun $U \subseteq V$, sodass $\phi_{C'}(U) \subseteq B^d$ offen ist, so ist auch $\phi_C(U) = A \cdot \phi_{C'}(U)$ offen in B^d. Das liegt daran, dass B ein topologischer Ring ist. Damit ist also die so definierte Topologie auf V von der Wahl der Basis von V unabhängig.

Im weiteren Verlaufe der Arbeit werden wir ausschließlich freie Darstellungen betrachten und darauf nicht jedes Mal explizit hinweisen.

Bemerkung 2.3 Operiert G trivial auf B, so ist V einfach eine lineare Darstellung. Ist weiter $B = \mathbb{Q}_p$ versehen mit der p-adischen Topologie, so nenne V eine p-adische Darstellung von G.

Beispiel 2.4 Sei F ein abgeschlossener Teilkörper von B^G (d.h. G operiert trivial auf F) und V eine (lineare) F-Darstellung von G. Setze $W := B \otimes_F V$ und definiere $g(\lambda \otimes v) := g(\lambda) \otimes g(v)$ für $g \in G,\ \lambda \in B,\ v \in V$. Dann ist W eine freie semilineare B-Darstellung vom Rang $dim_F(V)$.

Definition 2.5. (**a**) Seien V_1 und V_2 freie semilineare B-Darstellungen von G. Nenne V_1 und V_2 (G-)äquivalent, falls es einen B-Isomorphismus $F\colon V_1 \to V_2$ gibt, welcher mit den G-Operationen auf V_1 und V_2 verträglich ist. Das heißt für alle $g \in G, v \in V_1$ gilt:

$$F(g \cdot v) = g \cdot F(v)\ .$$

Schreibe dann $V_1 \cong_G V_2$. Allgemeiner ist in diesem Zusammenhang ein Homomorphismus eine mit den G-Operationen verträgliche B-lineare Abbildung $F\colon V_1 \to V_2$. Auf diese Weise bilden die semilinearen B-Darstellungen von G eine Kategorie.
(**b**) Nenne eine semilineare B-Darstellung V von G trivial, falls eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:
(i) V besitzt eine B-Basis in V^G.
(ii) $V \cong_G B^d$, wobei G auf B^d komponentenweise operiert.

Bemerkung 2.6 Man rechnet leicht nach, dass $\cong_G$ wirklich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller freien semilinearen B-Darstellungen von G vom Rang $d \geq 1$ beschreibt. Die Kategorie aller freien semilinearen B-Darstellungen von G besitzt in offensichtlicher Weise die Struktur einer Tannaka-Kategorie, besitzt also Summen, Tensorprodukte, Duale etc.

2.2 Klassifikation semilinearer freier B-Darstellungen von G

Zunächst notieren wir ein paar für den weiteren Verlauf wichtige Definitionen und Resultate, für deren Beweise auf den Appendix A.5.2 in [2] verwiesen sei.

Definition 2.7. (**a**) Sei M eine topologische G-Gruppe, ergo eine (hier multiplikative) topologische Gruppe, auf der G stetig und multiplikativ operiert. Ist M kommutativ, so sprechen wir von einem G-Modul. Nenne eine stetige Abbildung $U\colon G \to M$ einen 1-Kozykel, falls für alle $g_1, g_2 \in G$ Folgendes gilt:

$$U(g_1 \cdot g_2) = U(g_1) \cdot g_1(U(g_2))\ .$$

Die Menge aller solcher Abbildungen bezeichnen wir mit $Z^1_{cont}(G, M)$.
(**b**) Nenne $U, U' \in Z^1(G, M)$ kohomolog über M, falls es ein Element $X \in M$ gibt, sodass für alle $g \in G$

$$X^{-1} \cdot U(g) \cdot g(X) = U'(g)$$

gilt. Dadurch wird offenbar eine Äquivalenzrelation auf $Z^1_{cont}(G, M)$ definiert. Bezeichne mit $H^1_{cont}(G, M)$ die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation. Sie enthält als ausgezeichnetes Element die Klasse des trivialen Kozykels $1\colon G \to M$, $g \mapsto 1_M$. Wir sagen, dass $H^1_{cont}(G, M)$ eine punktierte Menge ist.

Proposition 2.8. *Sei $1 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 1$ eine exakte Sequenz topologischer G-Gruppen. Dann existiert eine lange exakte Sequenz punktierter Mengen*

$$1 \to M'^G \xrightarrow{\alpha_0} M^G \xrightarrow{\beta_0} M''^G \xrightarrow{\delta} H^1_{cont}(G, M') \xrightarrow{\alpha_1} H^1_{cont}(G, M) \xrightarrow{\beta_1} H^1_{cont}(G, M'') \ .$$

Ist G eine topologische Gruppe und $H \trianglelefteq G$ abgeschlossen, so wird jeder topologischer G-Modul M auf natürliche Weise ein topologischer H-Modul und M^H zu einem topologischen G/H-Modul. Es gibt dann eine natürliche Restriktionsabbildung

$$res\colon H^1_{cont}(G, M) \longrightarrow H^1_{cont}(H, M)$$

und eine natürliche Inflationsabbildung

$$inf\colon H^1_{cont}\left(G/H, M^H\right) \longrightarrow H^1_{cont}(G, M) \ ,$$

für die gilt

Proposition 2.9 (Inflation-Restriktion)**.** *Ist M ein topologischer G-Modul und $H \trianglelefteq G$ abgeschlossen, so ist die folgende Sequenz exakt:*

$$1 \to H^1_{cont}\left(G/H, M^H\right) \xrightarrow{inf} H^1_{cont}(G, M) \xrightarrow{res} H^1_{cont}(H, M) \ .$$

Proposition 2.10 (Hilbert 90)**.** *Sei $L \mid K$ eine galoische Körpererweiterung. Dann ist $H^1_{cont}(Gal(L \mid K), GL_n(L)) = 1$ für alle $n \geq 1$. Hierbei trägt $Gal(L \mid K)$ die Krulltopologie und $GL_n(L)$ die diskrete Topologie.*

Unser Ziel ist es nun, für festes $d \in \mathbb{N}$ sämtliche freien semilinearen B-Darstellungen von G vom Rang d durch geeignete Kohomologiegruppen zu beschreiben.. Sei dazu V eine solche und $M := \{e_1, \ldots, e_d\}$ eine B-Basis von V. Schreibe für $g \in G$ und $j = 1, \ldots, d$

$$g \cdot e_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij}(g) \cdot e_i \,,$$

für geeignete eindeutig bestimmte $a_{ij}(g) \in B$ für alle $i = 1, \ldots, d$ und definiere

$$U_g := \left(a_{ij}(g)\right)_{i,j=1}^{d} \,.$$

Da jedes $g \in G$ einen semilinearen Isomorphismus auf V definiert, ist $U_g \in GL_d(B)$ für alle $g \in G$. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} U \colon G &\longrightarrow GL_d(B) \\ g &\longmapsto U_g \,. \end{aligned}$$

Versieht man $Mat_B(d, d)$ mit der Produkttopologie und $GL_d(B)$ mit der dadurch induzierten Teilraumtopologie, so ist U stetig, da G stetig auf V operiert. Seien nun $g_1, g_2 \in G$. Dann gilt zum einen per Definition für alle $j = 1, \ldots, d$

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot e_j = \sum_{k=1}^{d} a_{kj}(g_1 \cdot g_2) \cdot e_k \,,$$

für eindeutig bestimmte $a_{kj}(g_1 \cdot g_2) \in G$ für alle $k = 1, \ldots, d$. Zum anderen erhalten wir

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot g_2) \cdot e_j = g_1 \cdot (g_2 \cdot e_j) = g_1 \cdot \sum_{i=1}^{d} a_{ij}(g_2) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{d} g_1\left(a_{ij}(g_2)\right) \cdot g_1(e_i) = \\ = \sum_{i=1}^{d} g_1\left(a_{ij}(g_2)\right) \cdot \sum_{k=1}^{d} a_{ki}(g_1) \cdot e_k = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} a_{ki}(g_1) \cdot g_1\left(a_{ij}(g_2)\right) \right) \cdot e_k \,. \end{aligned}$$

Damit sehen wir also, dass $U_{g_1 \cdot g_2} = U_{g_1} \cdot g_1(U_{g_2})$ und somit U ein stetiger 1-Kozykel ist. Ist $N = \{f_1, \ldots, f_d\}$ eine weitere B-Basis von V, so betrachte die Basiswechselmatrix

$$P := M_M^N(id_V) = (b_{ij})_{i,j=1}^{d} \in GL_d(B) \,.$$

Wie zuvor gesehen, induziert auch N einen stetigen 1-Koyzkel $U' \in Z^1_{cont}(G, GL_d(B))$. Dann gilt per Definition für alle $j = 1, \ldots, d$ und $g \in G$:

$$\begin{aligned} g \cdot f_j = \sum_{i=1}^{d} \left(U'_g\right)_{ij} \cdot f_i = \sum_{i=1}^{d} \left(U'_g\right)_{ij} \sum_{k=1}^{d} b_{ki} \cdot e_k = \\ = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} b_{ki} \cdot \left(U'_g\right)_{ij} \right) \cdot e_k \,. \end{aligned}$$

Andererseits gilt auch:

$$\begin{aligned} g \cdot f_j = g \sum_{i=1}^{d} b_{ij} \cdot e_i = \sum_{i=1}^{d} g\left(b_{ij}\right) \cdot g\left(e_i\right) = \sum_{i=1}^{d} g\left(b_{ij}\right) \sum_{k=1}^{d} \left(U_g\right)_{ki} \cdot e_k = \\ = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} \left(U_g\right)_{ki} \cdot g\left(b_{ij}\right) \right) \cdot e_k \,. \end{aligned}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich sieht man dann, dass für alle $g \in G$

$$\begin{aligned} U_g \cdot g\left(P\right) = P \cdot U'_g \\ \Leftrightarrow U'_g = P^{-1} \cdot U_g \cdot g\left(P\right) \end{aligned}$$

gilt. Damit sind U und U' kohomolog in $GL_d\left(B\right)$ und beschreiben somit dieselbe Klasse in $H^1_{cont}\left(G, GL_d\left(B\right)\right)$. Sei nun $W \cong_G V$ eine zu V äquivalente B-Darstellung von G und $F \colon V \to W$ ein entsprechender B-Isomorphismus. Dann ist $N := \{F\left(e_1\right), \ldots, F\left(e_d\right)\}$ eine B-Basis von W. Seien U, U' die durch M, N induzierten 1-Kozykel in $Z^1_{cont}\left(G, GL_d\left(B\right)\right)$. Dann folgt für alle $g \in G$ und $j = 1, \ldots, d$

$$g \cdot F\left(e_j\right) = F\left(g \cdot e_j\right) = F\left(\sum_{i=1}^{d} \left(U_g\right)_{ij} \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^{d} \left(U_g\right)_{ij} \cdot F\left(e_i\right) \,.$$

Andererseits erhalten wir

$$g \cdot F\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{d} \left(U'_g\right)_{ij} \cdot F\left(e_i\right) \,.$$

Damit gilt also $U = U'$, insbesondere sind U und U' kohomolog in $GL_d\left(B\right)$. Bezeichne die durch V induzierte Klasse in $H^1_{cont}\left(G, GL_d\left(B\right)\right)$ auch mit $[V]$. Bezeichne ferner mit $SRep^d_G\left(B\right)$ die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\cong_G$ auf der Menge aller freien semilinearen B-Darstellungen von G vom Rang d. Die folgende Abbildung ist also wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \Phi : SRep^d_G\left(B\right) \longrightarrow H^1_{cont}\left(G, GL_d\left(B\right)\right) \\ V \longmapsto [V] \,. \end{aligned}$$

Proposition 2.11. *Die Abbildung Φ ist bijektiv. Ferner ist V genau dann eine triviale semilineare B-Darstellung von G, wenn der zu einer (und damit jeder) B-Basis von V gehörige 1-Kozykel kohomolog zum trivialen 1-Kozykel ist.*

Beweis. Injektivität: Seien V, W zwei B-Darstellungen vom Rang d mit Basen $M = \{e_1, \ldots, e_d\}$ und $N = \{f_1, \ldots, f_d\}$ und U, U' die entsprechenden 1-Kozykel. Angenommen U

und U' sind kohomolog in $GL_d(B)$. Das heißt es existiert eine Matrix $P = (b_{ij})_{ij} \in GL_d(B)$ mit

$$\begin{aligned} U'_g &= P^{-1} \cdot U_g \cdot g(P) \\ \Leftrightarrow P \cdot U'_g &= U_g \cdot g(P) \ \ \forall g \in G\,. \end{aligned}$$

Sei dann $F\colon W \to V$ der B-Isomorphismus mit

$$M_M^N(F) = P\,.$$

Dann gilt für alle $g \in G$ und $j = 1, \ldots, d$:

$$\begin{aligned} F(g \cdot f_j) &= F\left(\sum_{i=1}^{d} \left(U'_g\right)_{ij} \cdot f_i\right) = \sum_{i=1}^{d} \left(U'_g\right)_{ij} \cdot F(f_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left(U'_g\right)_{ij} \sum_{k=1}^{d} b_{ki} \cdot e_k = \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} b_{ki} \cdot \left(U'_g\right)_{ij}\right) \cdot e_k = \\ &= \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} (U_g)_{ki} \cdot g(b_{ij})\right) \cdot e_k = \sum_{i=1}^{d} g(b_{ij}) \sum_{k=1}^{d} (U_g)_{ki} \cdot e_k = \\ &= \sum_{i=1}^{d} g(b_{ij}) \cdot g(e_i) = g \sum_{i=1}^{d} b_{ij} \cdot e_i = g \cdot F(f_j)\ . \end{aligned}$$

Damit ist F also verträglich mit den Operationen von G auf V und W und es folgt $V \cong_G W$.
Surjektivität: Sei $U \in Z^1_{cont}(G, GL_d(B))$. Definiere eine semilineare G-Operation auf $V = B^d$. Sei dafür $M = \{e_1, \ldots, e_d\}$ die Standardbasis von V und definiere für $g \in G$ und $j = 1, \ldots, d$

$$g \cdot e_j := \sum_{i=1}^{d} (U_g)_{ij} \cdot e_i\,.$$

Setze diese Definition semilinear auf ganz V fort. Per Definition ist dann U der zur Basis M zugehörige 1-Kozykel.
Den Rest der Behauptung entnimmt man den obigen Ausführungen. ■

Proposition 2.12. *Sei $L \mid K$ galoisch und L versehen mit der diskreten Topologie. Dann ist jede semilineare L-Darstellung von $G = Gal(L \mid K)$ trivial.*

Beweis. Mit Hilbert 90 ist $H^1_{cont}(G, GL_d(L)) = 1$ für alle $d \in \mathbb{N}$. Damit folgt die Behauptung dann aus 2.11. ■

2.3 B-Zulässigkeit

Von nun an sei B zusätzlich ein Körper, $E := B^G$ (ein Körper) und $F \leq E$ ein abgeschlossener Teilkörper. Sei zunächst W eine beliebige d-imensionale semilineare B-Darstellung von G. Dann ist W^G wegen $B^G = E$ ein E-Unterraum von W. Wir erhalten die folgende, mit den jeweiligen G-Operationen verträgliche B-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \alpha_W \colon B \otimes_E W^G &\longrightarrow W \\ \lambda \otimes w &\longmapsto \lambda \cdot w \, . \end{aligned}$$

Theorem 2.13. *Sei W eine semilineare B-Darstellung von G der Dimension d. Dann ist die Abbildung α_W injektiv und damit $dim_E\left(W^G\right) \leq dim_B\left(W\right)$. Ferner gilt:*

$$dim_E\left(W^G\right) = dim_B\left(W\right) \;\Leftrightarrow\; \alpha_W \text{ ist ein } B\text{-Isomorphismus} \;\Leftrightarrow\; W \text{ ist trivial}\, .$$

Beweis. Ist α_W injektiv, so folgt bereits

$$dim_E\left(W^G\right) = dim_B\left(B \otimes_E W^G\right) \leq dim_B\left(W\right)\, . \tag{2.1}$$

Für die Injektivität von α_W zeigen wir per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$: Ist $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W^G$ linear unabhängig über E, so sind (ihre Bilder unter α_W) auch linear unabhängig über B in W.
Induktionsanfang $n = 1$: Die Behauptung folgt, da dann $w_1 \neq 0$ gilt.
Induktionsschritt: Wir nehmen also an, dass die Behauptung bereits für jede $(n-1)$-elementige über E linear unabhängige Teilmenge aus W^G gilt und dass $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W^G$ linear unabhängig über E sind. Angenommen, sie sind linear abhängig über B als Elemente von W. Dann existieren Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in B$, die nicht alle Null sind, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot w_i = 0\, .$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\lambda_i \neq 0$ und damit invertierbar in B für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir können also ohne Einschränkung Folgendes annehmen:

$$w_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot w_i\, . \tag{2.2}$$

Da $w_i \in W^G$ für alle $i = 1, \ldots, n$, folgt für alle $g \in G$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot w_i = w_n = g\left(w_n\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot w_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} g\left(\lambda_i\right) \cdot w_i\, .$$

Die Unabhängigkeit der Vektoren $w_1, \ldots, w_{n-1}$ über B und die Tatsache, dass $\lambda_i, g(\lambda_i) \in B$ führt nach Koeffizientenvergleich zu $\lambda_i = g(\lambda_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Da $g \in G$ beliebig war, muss $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in E = B^G$ gelten. Dann ist aber mit (2.2) w_n linear abhängig von $w_1, \ldots, w_{n-1}$ über E. Das widerspricht jedoch unserer Annahme, dass die Menge $\{w_1, \ldots, w_n\}$ über E linear unabhängig ist. Damit ist die Injektivität von α_W gezeigt. Die erste Äquivalenz in der Kette folgt mit (2.1). Die zweite folgt folgendermaßen:

$$\begin{aligned} W \text{ ist trivial } &\Leftrightarrow W \text{ besitzt eine } B\text{-Basis in } W^G \\ &\Leftrightarrow \alpha_W \text{ ist surjektiv und damit bijektiv}\,. \end{aligned}$$

■

Ist V eine (lineare) F-Darstellung von G mit $dim_F(V) = d \geq 1$, so ist, wie bereits gesehen, $W := B \otimes_F V$ eine d-dimensionale semilineare B-Darstellung von G. Setze $D_B(V) := W^G = (B \otimes_F V)^G$. Dann ist $D_B(V)$ wegen $E = B^G$ ein E-Unterraum von W. Wir erhalten auch hier eine mit den jeweiligen G-Operationen verträgliche B-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha_V \colon B \otimes_E D_B(V) &\longrightarrow B \otimes_F V \\ \lambda \otimes v &\longmapsto \lambda \cdot v\,. \end{aligned}$$

Wir definieren nun einen für diese Arbeit äußerst zentralen Begriff.

Definition 2.14. Sei V eine F-Darstellung von G. Nenne V B-zulässig, falls $B \otimes_F V$ eine triviale semilineare B-Darstellung von G ist.

Proposition 2.15. *D_B definiert einen links-exakten Funktor von der Kategorie $Rep_F(G)$ aller linearen F-Darstellungen von G in die Kategorie Vec_E aller E-Vektorräume.*

Beweis. Seien V_1, V_2 zwei F-Darstellungen von G und $f \colon V_1 \to V_2$ eine F-lineare Abbildung, welche mit den jeweiligen G-Operationen verträglich ist. Dann induziert das Tensorieren mit B eine B-lineare Abbildung $\tilde{f} \colon B \otimes_F V_1 \to B \otimes_F V_2$ und für $\lambda \otimes v_1 \in B \otimes_F V_1$ sowie $g \in G$ gilt

$$g\left(\tilde{f}(\lambda \otimes v_1)\right) = g(\lambda \otimes f(v_1)) = g(\lambda) \otimes g(f(v_1)) = g(\lambda) \otimes f(g(v_1)) = \tilde{f}(g(\lambda \otimes v_1))\,,$$

das heißt $\tilde{f}$ ist G-äquivalent. Insbesondere schränkt sich $\tilde{f}$ zu einer E-linearen Abbildung $\tilde{f} \colon D_B(V_1) \to D_B(V_2)$ ein. Sei nun $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ eine exakte Sequenz linearer F-Darstellungen von G mit G-verträglichen linearen Abbildungen. Da B ein Körper ist, ist auch $0 \to B \otimes_F V_1 \to B \otimes_F V_2 \to B \otimes_F V_3 \to 0$ eine exakte Sequenz. Bekannterweise ist dann auch $0 \to (B \otimes_F V_1)^G \to (B \otimes_F V_2)^G \to (B \otimes_F V_3)^G$ exakt (vgl. auch Proposition 2.8). ■

Per Definition folgt nun aus Theorem 2.13 das folgende sehr nützliche Kriterium für B-Zulässigkeit

Korollar 2.16. *Für jede F-Darstellung V von G ist die Abbildung α_V injektiv und $dim_E\left(D_B\left(V\right)\right) \leq dim_F\left(V\right)$. Ferner gilt:*

$$dim_E\left(D_B\left(V\right)\right) = dim_F\left(V\right) \;\Leftrightarrow\; \alpha_V \text{ ist ein } B\text{-Isomorphismus} \;\Leftrightarrow\; V \text{ ist } B\text{-zulässig}.$$

Bemerkung 2.17 Das Korollar lässt sich auch für den Fall beweisen, dass B nur ein sogenannter (F, G)-regulärer Ring ist. Vergleiche dazu [2] Theorem 2.13.

Proposition 2.18. *(**1**) Ist V eine B-zulässige F-Darstellung von G, so sind sämtliche Teildarstellungen (also G-invariante F-Unterräume) und Quotienten von V wieder B-zulässig.*
*(**2**) Sind V_1 und V_2 B-zulässige F-Darstellungen von G, so ist auch $V_1 \otimes_F V_2$ B-zulässig und es gilt $D_B\left(V_1 \otimes_F V_2\right) \cong D_B\left(V_1\right) \otimes_E D_B\left(V_2\right)$.*
*(**3**) Ist V eine B-zulässige F-Darstellung von G, so auch der Dualraum V^*.*

Beweis. (**1**) Unterräume bzw. Quotienten lassen sich als Kerne bzw. Kokerne realisieren. Betrachte also eine exakte Sequenz $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ von F-Darstellungen von G mit G-verträglichen F-linearen Abbildungen. Dann ist mit 2.15 die Sequenz $0 \to D_B\left(V'\right) \to D_B\left(V\right) \to D_B\left(V''\right)$ exakt. Damit ist also $dim_E\left(D_B\left(V\right)\right) \leq dim_E\left(D_B\left(V'\right)\right) + dim_E\left(D_B\left(V''\right)\right)$. Nach Voraussetzung und Korollar 2.16 ist $dim_F\left(V\right) = dim_E\left(D_B\left(V\right)\right)$ und wir erhalten ebenfalls mit diesem Korollar somit die folgende Ungleichungskette

$$dim_E\left(D_B\left(V\right)\right) \leq dim_F\left(D_B\left(V'\right)\right) + dim_E\left(D_B\left(V''\right)\right) \leq dim_F\left(V'\right) + dim_F\left(V''\right).$$

Anfang und Ende dieser Kette sind jedoch aufgrund der Exaktheit unserer ersten Sequenz identisch. Aus der Ungleichung in Korollar 2.16 folgt $dim_F\left(D_B\left(V'\right)\right) = dim_F\left(V'\right)$ sowie $dim_F\left(D_B\left(V''\right)\right) = dim_F\left(V''\right)$, womit V' und V'' erneut nach Korollar 2.16 B-zulässig sind.
(**2**) Per Definition gelten $B \otimes_F V_1 \cong_G B^n$ und $B \otimes_F V_2 \cong_G B^m$. Damit folgt

$$B \otimes_F \left(V_1 \otimes_F V_2\right) \cong_G B^n \otimes_F V_2 \cong_G B^{n \cdot m}.$$

Also ist auch $V_1 \otimes_F V_2$ B-zulässig. Für die Isomorphie betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (B\otimes_F V_1)\otimes_B (B\otimes_F V_2) & \xrightarrow{\Sigma} & B\otimes_F (V_1\otimes_F V_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_B(V_1)\otimes_E D_B(V_2) & \xrightarrow{\sigma} & D_B(V_1\otimes_F V_2)\ . \end{array}$$

Dabei ist σ die Einschränkung des Isomorphismus Σ. Insbesondere ist σ injektiv. Da V_1 und V_2 B-zulässig sind, gilt zudem

$$\begin{aligned} dim_E\left(D_B(V_1)\otimes_E D_B(V_2)\right) = dim_F(V_1)\cdot dim_F(V_2) = dim_B\left(B\otimes_F(V_1\otimes_F V_2)\right) \geq \\ \geq dim_E\left(D_B(V_1\otimes_F V_2)\right)\ . \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Injektivität von $\alpha_{V_1\otimes_F V_2}$. Mit der bereits gezeigten Injektivität von σ folgt aber, dass diese Ungleichungskette eine Gleichungskette und σ bereits bijektiv ist.
(**3**) Wir führen eine Induktion über $dim_F(V) = n$.
Induktionsanfang: $n = 1$ d.h. $V = span_F(v)$. Damit ist wegen der B-Zulässigkeit von V dann $D_B(V) = span_E(b\otimes v)$ für ein geeignetes $b \in B\setminus\{0\}$. Dann gilt $V^* = span_F(v^*)$ mit $v^*(v) = 1$. Wir wissen mit 2.16, dass $dim_E(D_B(V^*)) \leq dim_F(V^*) = 1$ gilt. Finde also ein Element in $D_B(V^*)\setminus\{0\}$. Sei dazu $g \in G$. Dann existiert ein eindeutiges $\lambda_g \in F$ mit $g\cdot v = \lambda_g\cdot v$. Dabei gilt $\lambda_{g^{-1}} = \lambda_g^{-1}$. Da $g\cdot(b\otimes v) = b\otimes v$ gilt, folgt $(g\cdot b\cdot\lambda_g - b)\otimes v = 0$. Mit $v \neq 0_V$ ist dann $g\cdot b\cdot\lambda_g = b$. Betrachte nun $b^{-1}\otimes v^* \in B\otimes_F V^*$ unter dem B-Isomorphismus

$$\begin{aligned} B\otimes_F V^* &\to Hom_F(V,B) \\ b\otimes f &\mapsto b\cdot f\ , \end{aligned}$$

welcher mit den jeweiligen G-Operationen verträglich ist. Für $g\in G$ gilt

$$\left[g\cdot\left(b^{-1}\cdot v^*\right)\right](v) = g\cdot b^{-1}\cdot v^*\left(g^{-1}\cdot v\right) = g\cdot b^{-1}\cdot\lambda_{g^{-1}}\cdot v^*(v) = b^{-1}\cdot 1 = \left(b^{-1}\cdot v^*\right)(v)\ ,$$

woraus $g\cdot(b^{-1}\otimes v^*) = b^{-1}\otimes v^* \in D_B(V^*)\setminus\{0\}$ folgt.
Induktionsschritt: Sei nun $n\geq 2$ und die Aussage wahr für Vektorräume der Dimension $< n$. Wir nutzen den F-Isomorphismus

$$\begin{aligned} \bigwedge_F^{n-1} V\otimes_F\left(\bigwedge_F^{n} V\right)^* &\to \bigwedge_F^{1} V^* = V^* \\ w\otimes f &\mapsto f_w\colon v\mapsto f(w\wedge v)\ , \end{aligned}$$

welcher, wie man leicht nachrechnet, mit den jeweiligen G-Operationen verträglich ist. Da $\bigwedge_F^{n-1} V$ ein Quotient von $V^{\otimes(n-1)}$ ist, ist dieser Raum nach (**2**) B-zulässig. Da ferner

$dim_F\left(\bigwedge_F^n V\right) = 1$ gilt, ist auch $\left(\bigwedge_F^n V\right)^*$ (nach Induktionsanfang) B-zulässig. Somit folgt mit (**2**) die B-Zulässigkeit von V^*. ■

Bemerkung 2.19 Offenbar sind auch direkte Summen B-zulässiger Darstellungen wieder zulässig. Man sieht, dass die Klasse aller B-zulässigen F-Darstellungen von G daher eine Tannaka-Unterkategorie der Kategorie $Rep_F\left(G\right)$ bildet. Wir bezeichnen diese mit $Rep_F^B\left(G\right)$ und haben im letzten Beweis gesehen, dass D_B eingeschränkt auf diese Kategorie sogar exakt ist.

3 Algebraischer Abschluss und Vorarbeit

3.1 Der Körper $\mathbb{C}_K$

Proposition 3.1 (Krasners Lemma). *Sei (K, v) ein vollständiger nicht-archimedischer Körper und E ein abgeschlossener Teilkörper von K. Seien außerdem $\alpha, \beta \in K$, sodass α über E separabel ist. Ist nun $v(\beta - \alpha) > v(\alpha' - \alpha)$ für alle Konjugierten α' von α über E mit $\alpha' \neq \alpha$, so ist $\alpha \in E(\beta)$.*

Beweis. Seien $E' := E(\beta)$ und $\gamma := \beta - \alpha$. Dann ist $E'(\gamma) = E'(\alpha)$. Da $\alpha = \beta - \gamma \in E(\beta)$ genau dann gilt, wenn $\gamma \in E' = E(\beta)$, genügt es, zu zeigen, dass $E'(\gamma) = E'$ gilt. Das ist äquivalent dazu, dass das Minimalpolynom von γ über E' den Grad 1 besitzt. Angenommen, dem ist nicht so und sei γ' eine weitere Nullstelle oder anders gesagt, ein weiteres zu γ über E' konjugiertes Element. Diese existiert aufgrund der angenommenen Separabilität. Dann existiert ein α', welches zu α über E' konjugiert ist, mit $\gamma' = \beta - \alpha'$. Wegen der Eindeutigkeit der Bewertungsfortsetzung auf K ist $v(\gamma) = v(\gamma')$. Damit erhalten wir einerseits $v(\gamma' - \gamma) \geq v(\gamma) = v(\beta - \alpha)$. Andererseits gilt aber nach Voraussetzung $v(\gamma' - \gamma) = v(\alpha - \alpha') < v(\beta - \alpha) = v(\gamma)$. Das ist ein Widerspruch. ■

Betrachtet man auf $\mathbb{Q}$ den üblichen archimedischen Betrag, so erhalten wir nach Vervollständigung den Körper $\mathbb{R}$ mit entsprechender Fortsetzung dieses Betrages. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$ sind, wie man weiß, bezüglich der kanonischen Fortsetzung des Betrages von $\mathbb{R}$ weiterhin vollständig, weil endlich über $\mathbb{R}$. Ein solches Verhalten darf man im Falle nicht-archimedischer Bewertungen beziehungsweise Beträge nicht erwarten. Wir betrachten dazu einen vollständig diskret bewerteten Körper K mit Absolutbetrag $|\cdot|$. Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

Beispiel 3.2 ($\overline{K}$ ist nicht vollständig) Sei π das (bis auf Assoziiertheit) eindeutige Primelement des Bewertungsringes $\mathcal{O}_K$ von K. Dieser ist bekanntermaßen faktoriell. Damit besagt das Eisensteinkriterium (vgl. [4] Chapter IV, Paragraph 3, Theorem 3.1), dass $X^n - \pi$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ irreduzibel über $K = Quot(\mathcal{O}_K)$ ist. Insbesondere muss der Grad von $\overline{K}$ über K unendlich groß sein. Sei daher $M = \{a_i \in \overline{K} \mid i \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig über K. Setze $c_1 = 1$ und wähle für $i \geq 2$ sukzessiv Elemente $c_i = \pi^{e_i} \in K$, sodass $|c_i \cdot a_i| \to 0$ und $|c_{i+1} \cdot a_{i+1}| < |s'_k - s_k|$ für alle $1 \leq k \leq i$ und zu $s_k := \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot a_j \in \overline{K}$ über K

konjugierten Elemente s_k'.Dann ist wegen $s_n - s_{n-1} = c_n \cdot a_n$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\overline{K}$. Wäre nun $\overline{K}$ vollständig, so gäbe es dort einen Grenzwert s dieser Folge. Dann folgt jedoch für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|s - s_n| \leq \sup_{n+1\leq i} |c_i \cdot a_i| \leq |s_n' - s_n| \ .$$

Mit Krasner's Lemma 3.1 folgt dann aber, dass $s_n \in K(s)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da mit M auch die Menge $\{s_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig über K ist, wäre der Grad von $K(s)$ über K unendlich groß. Das ist ein Widerspruch zu $s \in \overline{K}$. ■

Also ist eine Vervollständigung von $\overline{K}$ nötig. Die Befürchtung ist nun, dass man vor einer langen Kette aus algebraischen Abschlüssen und Vervollständigungen steht. Glücklicherweise ist das nicht der Fall:

Korollar 3.3. *Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Dann ist die Vervollständigung $\mathbb{C}_K := \widehat{\overline{K}}$ von $\overline{K}$ bezüglich v ein vollständiger und algebraisch abgeschlossener Körper.*

Beweis. Zunächst einmal ist $\mathbb{C}_K$ perfekt. Im Fall $char(K) = 0$ ist das klar. Im Fall $char(K) = p > 0$ ist die p-Potenzierung auf $\overline{K}$ ein bijektiver Homöomorphismus und setzt sich daher bijektiv auf $\mathbb{C}_K$ fort. Sei $P = \sum_{i=0}^{d} a_i \cdot X^i \in \mathbb{C}_K[X]$ mit $d \geq 2$ und $a_d = 1$ ein normiertes separables Polynom. Wir zeigen, dass P eine Nullstelle in $\mathbb{C}_K$ besitzt. Nach geeigneter Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{C}_K \setminus \{0\}$ können wir annehmen, dass $P \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}[X]$ gilt. Sei C' der Zerfällungskörper von P über $\mathbb{C}_K$ sowie $r := \max\{v(\alpha_i - \alpha_j) \mid i \neq j\}$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in C'$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P sind. Da $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ dicht in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_K}$ liegt, existiert für jedes $i = 0, \dots, d$ ein $b_i \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ mit

$$v(a_i - b_i) > r \cdot d\,,$$

wobei wir $b_d = 1$ wählen. Setze dann $P_1 := \sum_{i=0}^{d} b_i \cdot X^i \in \mathcal{O}_{\overline{K}}[X]$. Da $\mathcal{O}_{\overline{K}} \subset \overline{K}$, existiert ein $\beta \in \overline{K}$ mit $P_1(\beta) = 0$. Sei ohne Einschränkung $v(\beta - \alpha_1) \geq v(\beta - \alpha_i)$ für alle $i = 1, \dots, d$. Da

$$P(\beta) = P(\beta) - P_1(\beta) = \sum_{i=1}^{d} (a_i - b_i) \cdot \beta^i$$

und $v(\beta) \geq 0$ (P_1 ist ganz und normiert), folgt einerseits

$$v(P(\beta)) = v\left(\sum_{i=0}^{d} (a_i - b_i) \cdot \beta^i\right) > r \cdot d\,.$$

Andererseits gilt

$$P(\beta) = \prod_{i=1}^{d} (\beta - \alpha_i)$$

und somit

$$r \cdot d < v(P(\beta)) = \sum_{i=1}^{d} v(\beta - \alpha_i) \ .$$

Aufgrund der Maximalität von α_1 gilt damit $v(\beta - \alpha_1) > r \geq v(\alpha_i - \alpha_1)$ für alle $i \neq 1$. Mit 3.1 folgt dann $\alpha_1 \in \mathbb{C}_K(\beta) = \mathbb{C}_K$. ■

Bemerkung 3.4 Ist $K \mid \mathbb{Q}_p$ endlich, so gilt $\overline{K} = \overline{\mathbb{Q}_p}$ und es ist auch die Schreibweise $\mathbb{C}_K = \mathbb{C}_p$ gebräuchlich.

3.2 Das Theorem von Ax-Sen-Tate

Sei nunmehr $K \mid \mathbb{Q}_p$ endlich. Von nun an rechnen wir, solange nichts anderes behauptet wird, innerhalb von $\mathbb{C}_K = \widehat{\overline{K}}$ und mit der Bewertungsfortsetzung $v = v_p$ von $\mathbb{Q}_p$ darauf. Sei $L \mid K$ algebraisch und $\alpha \in \overline{K}$. Definiere

$$\Delta_L(\alpha) := \min\{v(\alpha' - \alpha) \ \mid \alpha' \text{ konjugiert zu } \alpha \text{ über } L\} \,.$$

Dann gilt

$$\Delta_L(\alpha) = +\infty \ \Leftrightarrow \ \alpha \in L \,.$$

Proposition 3.5 (Ax-Sen's Lemma)**.** *Sei $L \mid K$ eine algebraische Körpererweiterung und $\alpha \in \overline{K}$ algebraisch über L. Dann existiert ein $a \in L$, sodass $v(\alpha - a) \geq \Delta_L(\alpha) - \frac{p}{(p-1)^2}$.*

Sind also alle Nullstellen des Minimalpolynoms von α über L nah beieinander, so lässt sich α entsprechend gut durch ein Element $a \in L$ annähern. Zunächst benötigen wir ein allgemeines Resultat:

Lemma 3.6. *Sei (E, v) ein nicht-archimedischer Körper und $\overline{E}$ ein algebraischer Abschluss von E. Sei $R \in E[X]$ normiert mit $\operatorname{grad}(R) = d \geq 2$, sodass $v(\lambda) \geq r$ für alle Nullstellen $\lambda \in \overline{E}$ von R. Dann existiert für alle $0 < m < d$ eine Nullstelle $\mu \in \overline{E}$ von $R^{(m)}$ (die m-te formale Ableitung von R), sodass $v(\mu) \geq r - \frac{1}{d-m} \cdot v\left(\binom{d}{m}\right)$.*

Beweis. Sei zunächst

$$R = \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i) = \sum_{i=0}^{d} b_i \cdot X^i$$

mit $\lambda_i \in \overline{E}$. Dann ist $b_i \in \mathbb{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_d]$ homogen vom Grad $d-i$ und damit $v(b_i) \geq r \cdot (d-i)$ für alle $i = 0, \ldots, d$. Schreibe dann

$$\frac{1}{m!} \cdot R^{(m)} = \sum_{i=m}^{d} \binom{i}{m} \cdot b_i \cdot X^{i-m} = \binom{d}{m} \prod_{i=1}^{d-m} (X - \mu_i)$$

mit geeigneten $\mu_1, \ldots, \mu_{d-m} \in \overline{E}$. Dann folgt

$$b_m = \binom{d}{m} (-1)^{d-m} \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_{d-m} \, .$$

Also gilt nach Anwendung der Bewertung v und Umformung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d-m} v(\mu_i) = v(b_m) - v\left(\binom{d}{m}\right) \geq r \cdot (d-m) - v\left(\binom{d}{m}\right) = \\ = (d-m) \cdot \left(r - \frac{1}{d-m} \cdot v\left(\binom{d}{m}\right)\right) \, . \end{aligned}$$

Demnach muss es mindestens ein $i \in \{1, \ldots, d-m\}$ geben, sodass

$$v(\mu_i) \geq r - \frac{1}{d-m} \cdot v\left(\binom{d}{m}\right) \, .$$

■

Beweis von Proposition 3.5. Für $d \geq 1$ sei $l(d) := \max\{l \in \mathbb{N}_0 \mid p^l \leq d\}$ und $\epsilon(d) := \sum_{i=1}^{l(d)} \frac{1}{p^i - p^{i-1}}$. Dann gilt

$$l(d) = 0 \;\Leftrightarrow\; d < p \;\Leftrightarrow\; \epsilon(d) = 0 \, .$$

Für $\alpha \in L$ ist die Aussage klar mit $a = \alpha$. Sei also $\alpha \notin L$.
Wir zeigen: Ist $[L(\alpha) : L] = d \geq 2$, so existiert ein $a \in L$ mit

$$v(\alpha - a) \geq \Delta_L(\alpha) - \epsilon(d) \, .$$

Damit folgt dann die Behauptung, denn es ist

$$\epsilon(d) \leq \epsilon(d+1) \text{ und } \lim_{d \to \infty} \epsilon(d) = \frac{p}{(p-1)^2} \, .$$

Dazu führen wir eine Induktion über d.
Induktionsanfang $d = 2$: Dann gilt für das Minimalpolynom P von α über L

$$P = (X - \alpha) \cdot (X - \alpha') = X^2 - (\alpha + \alpha') \cdot X + \alpha \cdot \alpha'$$

mit einem geeigneten $\alpha' \in \mathbb{C}_K \setminus \{\alpha\}$. Insbesondere sind $\alpha + \alpha', \alpha \cdot \alpha' \in L$. Definiere dann $a := \frac{\alpha+\alpha'}{2} \in L$. Für a gilt

$$v(\alpha - a) = v\left(\frac{\alpha - \alpha'}{2}\right) = v(\alpha - \alpha') - v(2) \ .$$

Bemerke, dass

$$v(2) = \epsilon(2) = \begin{cases} \frac{1}{2^1 - 2^0} = 1 & \text{falls } p = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da in diesem Fall $\Delta_L(\alpha) = v(\alpha - \alpha')$ ist, folgt damit also $v(\alpha - a) \geq \Delta_L(\alpha) - \epsilon(2)$.
Sei die Behauptung nun bereits für alle $k \leq d - 1$ bewiesen und sei $P \in L[X]$ das Minimalpolynom von α vom Grad d. Definiere $R := P(X + \alpha) \in L(\alpha)[X]$. Dann ist $R^{(m)} = P^{(m)}(X + \alpha)$. Setze ferner $r := \Delta_L(\alpha)$. Alle Nullstellen von R sind von der Form $\alpha' - \alpha$, wobei α' zu α über L konjugiert ist (d.h. α' ist auch eine Nullstelle von P). Für diese gilt $v(\alpha' - \alpha) \geq r$. Mit 3.6 existiert nun für alle $0 < m < d$ ein $\mu \in \overline{K}$, sodass $R^{(m)}(\mu) = 0$ und

$$v(\mu) \geq r - \frac{1}{d - m} \cdot v\left(\binom{d}{m}\right)$$

gilt. Setze dann $\beta := \mu + \alpha \in \overline{K}$. Damit gilt dann

$$v(\beta - \alpha) = v(\mu) \geq r - \frac{1}{d - m} \cdot v\left(\binom{d}{m}\right) .$$

Da $P^{(m)}(\beta) = P^{(m)}(\mu + \alpha) = R^{(m)}(\mu) = 0$ und $P^{(m)} \in L[X]$ von Grad $d - m$, ist β algebraisch über L vom Grad höchstens $d - m$. Wir unterscheiden die zwei Fälle

$$d = \begin{cases} p^s \cdot p & s \geq 0 \\ p^s \cdot n & s \geq 0, \ n > 1, \ ggT(n, p) = 1 \end{cases}$$

und setzen $m := p^s \geq 1$. Betrachte nun $v\left(\binom{d}{m}\right)$.
1. Fall: $d = p^s \cdot p$. Dann gilt

$$\binom{d}{m} = \binom{p^{s+1}}{p^s} \equiv \binom{p^s}{p^{s-1}} \equiv \ldots \equiv \binom{p}{1} = p \mod p^2$$

(vgl. [3] Theorem 1.12). Damit wird $\binom{d}{m}$ von p aber nicht von p^2 geteilt. Das heißt $v\left(\binom{d}{m}\right) = 1$.
2. Fall: $d = p^s \cdot n$. Dann gilt

$$\binom{d}{m} = \binom{p^s \cdot n}{p^s \cdot 1} \equiv \binom{n}{1} = n \mod p$$

(vgl. [3] Theorem 1.11). Da n teilerfremd zu p ist, ist p kein Teiler von $\binom{d}{m}$ also $v\left(\binom{d}{m}\right) = 0$
Ist nun $\beta \in L$, so wähle $a = \beta$. Dann folgt nämlich

$$\begin{aligned} v\left(\alpha - a\right) = v\left(\beta - \alpha\right) &\geq r - \frac{1}{d-m} \cdot v\left(\binom{d}{m}\right) = \\ &= \begin{cases} r - \frac{1}{d-m} = r - \frac{1}{p^{s+1}-p^s} & \text{falls } d = p^s \cdot p \\ r & \text{falls } d = p^s \cdot n \end{cases} \\ &\geq r - \epsilon\left(d\right) . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Bemerke dabei, dass im ersten Fall $\epsilon\left(d\right) = \epsilon\left(p^{s+1}\right) = \sum_{i=1}^{s+1} \frac{1}{p^i - p^{i-1}}$ gilt.
Sei also $\beta \notin L$. Dann ist β algebraisch über L vom Grad $\leq d - m < d$ und nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $a \in L$ mit

$$v\left(\beta - a\right) \geq \Delta_L\left(\beta\right) - \epsilon\left(d - m\right) .$$

Bemerke dabei, dass die Funktion ϵ monoton wachsend ist. Wir zeigen nun, dass $v\left(\alpha - a\right) \geq \Delta_L\left(\alpha\right) - \epsilon\left(d\right)$ gilt. Betrachte dazu erneut die obigen Fälle.
1. Fall: $d = p^s \cdot p$. Wir haben bereits in (3.1) gesehen, dass

$$v\left(\alpha - \beta\right) \geq r - \epsilon\left(d\right)$$

gilt. Sei nun β' konjugiert zu $\beta = \mu + \alpha$ über L. Dann ist $\beta = \mu' + \alpha'$ mit über L zu μ bzw. α konjugierten Elementen μ' bzw. α'. Dann folgt

$$v\left(\beta' - \beta\right) = v\left(\mu' - \mu + \alpha' - \alpha\right) \geq \min\{v\left(\alpha' - \alpha\right), v\left(\mu\right), v\left(\mu'\right)\} \geq r - \frac{1}{p^{s+1} - p^s} .$$

Damit folgt dann

$$\Delta_L\left(\beta\right) \geq r - \frac{1}{p^{s+1} - p^s}$$

und somit

$$v(\beta - a) \geq \Delta_L(\beta) - \epsilon(d-m) \geq r - \left(\frac{1}{p^{s+1}-p^s} + \epsilon\left(p^{s+1}-p^s\right)\right) = r - \epsilon\left(p^{s+1}\right) =$$
$$= r - \epsilon(d) \ .$$

Zusammen ergibt sich dann wie gewollt

$$v(\alpha - a) = v(\alpha - \beta + \beta - a) \geq \min\{v(\alpha - \beta), v(\beta - a)\} \geq r - \epsilon(d) \ .$$

Fall 2: $d = p^s \cdot n$. Wir nutzen erneut (3.1) und folgern völlig analog zum ersten Fall

$$v(\alpha - a) = v(\alpha - \beta + \beta - a) \geq r - \epsilon(d) \ .$$

Damit folgt die Behauptung. ■

Sei $G_K := Gal\left(\overline{K} \mid K\right)$. Da $\overline{K}$ dicht in $\mathbb{C}_K$ liegt und v auf $\overline{K}$ Galoisinvariant ist, setzt sich die Operation von G_K auf $\overline{K}$ stetig auf $\mathbb{C}_K$ fort. Wir wollen diese Operation nun genauer verstehen.

Proposition 3.7. *Sei $H \leq G_K$ abgeschlossen. Dann gilt*

$$\widehat{\overline{K}}^H = \mathbb{C}_K^H = \widehat{\overline{K}^H} \ .$$

Insbesondere ist also

$$\mathbb{C}_K^{G_K} = \widehat{K} = K \ .$$

Beweis. Setze $\epsilon := \frac{p}{(p-1)^2}$, $L := \overline{K}^H$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}_K^H$. Wähle eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{K}$, sodass $v(\alpha - \alpha_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt für alle $\sigma \in H = Gal\left(\overline{K} \mid L\right)$

$$v(\sigma(\alpha_n) - \alpha_n) = v(\sigma(\alpha_n) - \sigma(\alpha) + \alpha - \alpha_n) \geq \min\{v(\sigma(\alpha_n - \alpha)), v(\alpha_n - \alpha)\} \geq n \, .$$

Damit ist also $\Delta_L(\alpha_n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit 3.5 existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in L$, sodass $v(\alpha_n - a_n) \geq n - \epsilon$ und damit $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} a_n \in \widehat{L}$. Wir haben also die Inklusion $\mathbb{C}_K^H \subseteq \widehat{L}$ gezeigt. Die andere Inklusion ist klar, da $L \subseteq \mathbb{C}_K^H$ und $\mathbb{C}_K^H$ vollständig ist. ■

Theorem 3.8 (Ax-Sen-Tate)**.** *Mit der bisherigen Notation sind*

$$\begin{aligned}\{H \leq G_K \mid H \text{ abgeschlossen}\} &\xleftrightarrow{1:1} \{K \leq L \leq \mathbb{C}_K \mid L \text{ abgeschlossener Zwischenkörper}\}\\ H &\longmapsto \mathbb{C}_K^H\\ Gal\left(\overline{K} \mid \overline{K} \cap L\right) &\longleftarrow\!\shortmid L\end{aligned}$$

zueinander inverse, inklusionsumkehrende Bijektionen.

Beweis. Die Wohldefiniertheit und Inklusionsumkehrung der Abbildungen sind klar. Sei zunächst $H = Gal\left(\overline{K} \mid L\right) \leq G_K$ abgeschlossen. Mit 3.7 ist $\mathbb{C}_K^H = \widehat{L}$. Da $L \subseteq \overline{K} \cap \widehat{L}$, ist $Gal\left(\overline{K} \mid \overline{K} \cap \widehat{L}\right) \subseteq Gal\left(\overline{K} \mid L\right) = H$. Sei $\sigma \in H$. Da σ stetig auf $\overline{K}$ operiert und L dicht in $\widehat{L}$ liegt, fixiert σ auch $\overline{K} \cap \widehat{L}$ und es folgt $\sigma \in Gal\left(\overline{K} \mid \overline{K} \cap \widehat{L}\right)$. Damit ist also Folgendes gezeigt:

$$H = Gal\left(\overline{K} \mid \overline{K} \cap \mathbb{C}_K^H\right) .$$

Sei also nun L ein vollständiger Zwischenkörper von K und $\mathbb{C}_K$ und sei $L' := \overline{K} \cap L$ sowie $H := Gal\left(\overline{K} \mid L'\right)$ und $H' := Gal\left(\overline{K}L \mid L\right)$. Wir zeigen, dass $\widehat{L'} = \mathbb{C}_K^H = L$ gilt. Betrachte zunächst die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned}\varphi \colon Gal\left(\overline{K}L \mid L\right) &\longrightarrow Gal\left(\overline{K} \mid L'\right)\\ \sigma &\longmapsto \sigma_{|\overline{K}} .\end{aligned}$$

Dann ist φ ein stetiger Gruppenisomorphismus (vgl. [4] Chapter I, Paragraph 6, Theorem 1.12). Damit folgt

$$L = \widehat{L} = \mathbb{C}_K^{H'} = \mathbb{C}_K^H = \widehat{L'} \subseteq L .$$

Die erste Gleichung folgt, da L abgeschlossen ist. Die zweite, weil $\overline{K} \subseteq \overline{K}L \subseteq \mathbb{C}_K$ und damit $\widehat{\overline{K}L} = \mathbb{C}_K$ zusammen mit 3.7. Die dritte Gleichung ist die Bijektivität von φ und die vierte folgt erneut wegen 3.7. Die Inklusion am Ende folgt aus $L' \subseteq L$ und der Abgeschlossenheit von L. Wir haben also gezeigt, dass

$$L = \mathbb{C}_K^{Gal\left(\overline{K} \mid \overline{K} \cap L\right)} .$$

■

3.3 Die Kohomologiegruppe $H^1_{cont}\left(G_K, GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)\right)$

Wir fixieren eine total verzweigte Zwischenerweiterung K_∞ von $\overline{K} \mid K$ mit $\Gamma := \Gamma_0 := Gal\left(K_\infty \mid K\right) \cong \left(\mathbb{Z}_p, +\right)$ (algebraisch und topologisch). Setze $H := G_{K_\infty} = Gal\left(\overline{K} \mid K_\infty\right)$. Insbesondere ist dann $\Gamma \cong G_K/G_{K_\infty} = G_K/H$. Setze ferner $\Gamma_m := \Gamma^{p^m} \cong p^m\mathbb{Z}_p$ sowie $K_m := K_\infty^{\Gamma_m}$. Sei nun $\gamma \in \Gamma$ ein topologischer Erzeuger von Γ, d.h. $\langle\gamma\rangle$ liegt dicht in Γ und für jedes $\sigma \in \Gamma$ existiert genau ein $a \in \mathbb{Z}_p$, sodass $\sigma = \gamma^a$. Insbesondere ist $\gamma_m := \gamma^{p^m}$ ein topologischer Erzeuger von Γ_m. Wir zeigen zunächst, das eine solche Erweiterung $K_\infty \mid K$ stets existiert.

3.3.1 Die Existenz von K_∞

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_n \in \overline{K}$ eine primitive p^n-te Einheitswurzel und betrachte den Zwischenkörper $L := K\left(\zeta_n | n \geq 1\right)$ von $\overline{K} \mid K$. Dann ist $L \mid K$ galoisch, da $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ mit $L_n := K\left(\zeta_n\right) \mid K$ endlich galoisch. Definiere weiter $L' := \mathbb{Q}_p\left(\zeta_n | n \geq 1\right)$ und betrachte die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi\colon Gal\left(L \mid K\right) &\longrightarrow Gal\left(L' \mid \mathbb{Q}_p\right) \\ \sigma &\longmapsto \sigma_{|L'}\,. \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, dass dies ein offener und stetiger Gruppenmonomorphismus ist und kann damit $Gal\left(L \mid K\right)$ als offene Untergruppe von $Gal\left(L' \mid \mathbb{Q}_p\right)$ auffassen. Wir betrachten zunächst die letztere Gruppe und definieren dazu $L'_n := \mathbb{Q}_p\left(\zeta_n\right)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $Gal\left(L' \mid \mathbb{Q}_p\right) \cong \varprojlim Gal\left(L'_n \mid \mathbb{Q}_p\right)$. Ferner ist $Gal\left(L'_n \mid \mathbb{Q}_p\right) \cong \left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)^*$ und $L'_n \mid \mathbb{Q}_p$ total verzweigt (vgl. [5] Kapitel II, Paragraph 7, Satz 7.13). Dadurch ist dann $L' = \bigcup_{n\geq 1} L'_n \mid \mathbb{Q}_p$ total verzweigt und

$$Gal\left(L \mid K\right) \leq Gal\left(L' \mid \mathbb{Q}_p\right) \cong \varprojlim \left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right)^* \cong \mathbb{Z}_p^* = \left(Z/p\mathbb{Z}\right)^* \times p\mathbb{Z}_p\,.$$

Damit ist dann auch $L|K$ total verzweigt. Die Torsionsuntergruppe $T\left(\mathbb{Z}_p^*\right)$ von $\mathbb{Z}_p^*$ ist endlich und diskret (nämlich isomorph zu $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*$). Damit gilt das Gleiche auch für die Torsionsuntergruppe T von $Gal\left(L \mid K\right)$. Setze nun $K_\infty := L^T$. Dann induziert φ einen Monomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon Gal\left(K_\infty \mid K\right) \cong Gal\left(L \mid K\right)/T \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*/T\left(\mathbb{Z}_p^*\right) \cong \left(\mathbb{Z}_p, +\right)\,.$$

Dieser ist weiterhin offen und stetig. Damit ist also $Gal\left(K_\infty \mid K\right)$ als offene Untergruppe von $\mathbb{Z}_p$ zu verstehen und nach Skalierung dann wie gewollt $Gal\left(K_\infty \mid K\right) \cong \left(\mathbb{Z}_p, +\right)$. Als Teilererweiterung ist K_∞ weiterhin total verzweigt über K.

Bewertungen von Matrizen

Im Folgenden wollen wir Matrizen über $\mathbb{C}_K$ eine Bewertung zuweisen. Dies geschieht durch die Funktion

$$\begin{aligned} v = v_p \colon Mat_{\mathbb{C}_K}(n,n) &\longrightarrow \mathbb{Q} \cup \{+\infty\} \\ M = (a_{ij})_{i,j=1}^n &\longmapsto v(M) := \min\{v(a_{ij}) \mid i,j = 1,\ldots,n\}\,. \end{aligned}$$

Für sie gelten, wie man leicht sieht,

1. $v(A) = +\infty \;\Leftrightarrow\; A = 0_n$,
2. $v(A \cdot B) \geq v(A) + v(B)$,
3. $v(A + B) \geq \min\{v(A), v(B)\}$.

Unser Ziel ist nun ein besseres Verständnis über semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellungen von G_K zu erlangen. Mit 2.11 heißt dies, die erste Kohomologiegruppe $H^1_{cont}(G_K, GL_n(\mathbb{C}_K))$ zu verstehen. Dazu führen wir zwei Reduktionen durch. Das sind zum einen der sogenannte »fast étale Abstieg«, mit dem wir uns auf $H^1_{cont}\left(\Gamma, GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)\right)$ beschränken dürfen. Im zweiten Schritt führen wir eine »Dekomplettierung« durch, welche es uns gestattet, uns nur noch auf die Kohomologiegruppe $H^1_{cont}(\Gamma, GL_n(K_\infty))$ konzentrieren zu müssen.

3.3.2 Fast étaler Abstieg

Wir benötigen zunächst:

Lemma 3.9. *Sei $L \mid K_\infty$ endlich. Dann existiert für jedes $a > 0$ ein $x \in L$, sodass*

$$v(x) > -a \text{ und } Tr_{L|K_\infty}(x) = 1\,.$$

Beweis. Vgl. [2] Korollar A.89 ■

Lemma 3.10. *Sei $H_0 \leq H = Gal\left(\overline{K} \mid K_\infty\right)$ offen und $U \colon H_0 \to GL_n(\mathbb{C}_K)$ ein stetiger 1-Kozykel, sodass für ein geeignetes $a > 0$ und alle $\sigma \in H_0$*

$$v(U_\sigma - I_n) \geq a$$

gilt. Dabei sei $U_\sigma := U(\sigma)$. Dann existiert eine Matrix $M \in GL_n(\mathbb{C}_K)$ mit

$$v(M - I_n) \geq \frac{a}{2} \text{ und } v\left(M^{-1} \cdot U_\sigma \cdot \sigma(M) - I_n\right) \geq a + 1$$

für alle $\sigma \in H_0$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt sofort, dass $v(U_\sigma) \geq 0$, also dass U_σ ganz ist für alle $\sigma \in H_0$. Da U stetig ist, existiert ein offener Normalteiler $H_1 \trianglelefteq H_0$ mit

$$v(U_\sigma - I_n) \geq a + 1 + \frac{a}{2}$$

für alle $\sigma \in H_1$. Mit 3.9 existiert ein $\alpha \in K_\infty^{H_1}$, sodass

$$v(\alpha) > -\frac{a}{2} \text{ und } \sum_{\tau \in H_0/H_1} \tau(\alpha) = 1\,. \tag{3.2}$$

Bemerke dabei, dass H_0/H_1 endlich ist. Sei $S \subseteq H_0$ ein vollständiges Repräsentantensystem von H_0/H_1 und setze $M_S := \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot U_\sigma$. Dann folgt mit (3.2), dass $M_S - I_n = \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot (U_\sigma - I_n)$, woraus wiederum

$$v(M_s - I_n) \geq \min_{\sigma \in S}\{v(\sigma(\alpha) \cdot (U_\sigma - I_n))\} \geq \min_{\sigma \in S}\{v(\alpha) + v(U_\sigma - I_n)\} \geq -\frac{a}{2} + a = \frac{a}{2} > 0$$

folgt. Mit der geometrischen Reihe erhält man dann, dass $M_S \in GL_n(\mathbb{C}_K)$ sowie

$$M_S^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (I_n - M_S)^i$$

gelten. Insbesondere ist dann $v\left(M_S^{-1}\right) \geq 0$. Für $\tau \in H_1$ gilt

$$U_\sigma - U_{\sigma \cdot \tau} = U_\sigma - U_\sigma \cdot \sigma(U_\tau) = U_\sigma \cdot (I_n - \sigma(U_\tau))\,.$$

Sei $S' \subseteq H_0$ ein weiteres Repräsentantensystem von H_0/H_1. Dann existieren für jedes $\sigma' \in S'$ eindeutige Elemente $\sigma \in S$ und $\tau_\sigma \in H_1$, sodass $\sigma' = \sigma \cdot \tau_\sigma$. Damit folgt nun, da $\alpha \in K_\infty^{H_1}$:

$$\begin{aligned} M_S - M_{S'} &= \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot U_\sigma - \sum_{\sigma' \in S'} \sigma'(\alpha) \cdot U_{\sigma'} = \\ &= \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot U_\sigma - \sum_{\sigma \in S} \sigma(\tau_\sigma(\alpha)) \cdot U_{\sigma \cdot \tau_\sigma} = \\ &= \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot U_\sigma - \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot U_{\sigma \cdot \tau_\sigma} = \\ &= \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot (U_\sigma - U_{\sigma \cdot \tau_\sigma}) = \\ &= \sum_{\sigma \in S} \sigma(\alpha) \cdot U_\sigma \cdot (I_n - \sigma(U_{\tau_\sigma}))\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann unter Betrachtung der Bewertung

$$\begin{aligned} v\left(M_S - M_{S'}\right) &\geq \min_{\sigma\in S}\{v\left(\sigma\left(\alpha\right)\cdot U_\sigma\cdot\left(I_n - \sigma\left(U_{\tau_\sigma}\right)\right)\right)\} \geq \\ &\geq \min_{\sigma\in S}\{v\left(\alpha\right) + v\left(U_\sigma\right) + v\left(\sigma\left(I_n - U_{\tau_\sigma}\right)\right)\} \geq \\ &\geq -\frac{a}{2} + 0 + a + 1 + \frac{a}{2} = a+1\,. \end{aligned}$$

Für jedes $\tau\in H_0$ gilt

$$U_\tau\cdot\tau\left(M_S\right) = \sum_{\sigma\in S}\left(\tau\cdot\sigma\right)\left(\alpha\right)\cdot U_\tau\cdot\tau\left(U_\sigma\right) = \sum_{\sigma\in S}\left(\tau\cdot\sigma\right)\left(\alpha\right)\cdot U_{\tau\cdot\sigma} = M_{\tau\cdot S}\,.$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} M_S^{-1}\cdot U_\tau\cdot\tau\left(M_S\right) &= M_S^{-1}\cdot M_{\tau\cdot S} = I_n + M_S^{-1}\cdot M_{\tau\cdot S} - M_S^{-1}\cdot M_S = \\ &= I_n + M_S^{-1}\cdot\left(M_{\tau\cdot S} - M_S\right)\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir letztlich

$$\begin{aligned} v\left(M_S^{-1}\cdot U_\tau\cdot\tau\left(M_S\right) - I_n\right) &= v\left(M_S^{-1}\cdot\left(M_{\tau\cdot S} - M_S\right)\right) \geq v\left(M_S^{-1}\right) + v\left(M_{\tau\cdot S} - M_S\right) \geq \\ &\geq 0 + a + 1 = a+1\,. \end{aligned}$$

Wir wählen also $M = M_S$ für ein beliebiges Repräsentantensystem S von H_0/H_1. ■

Korollar 3.11. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Lemma 3.10 existiert eine Matrix $M\in GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)$, sodass*

$$v\left(M - I_n\right)\geq\frac{a}{2}\ \text{und}\ M^{-1}\cdot U_\sigma\cdot\sigma\left(M\right) = I_n\ \forall\sigma\in H_0\,.$$

Insbesondere ist U auf H_0 (kohomologisch) trivial.

Beweis. Wir wenden Lemma 3.10 induktiv an: Definiere $U^0 := U$. Dann gibt es mit 3.10 eine Matrix $M_1\in GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)$ mit $v\left(M_1 - I_n\right)\geq\frac{a}{2}$ und

$$v\left(M_1^{-1}\cdot U_\sigma^0\cdot\sigma\left(M_1\right) - I_n\right)\geq a+1$$

für alle $\sigma\in H_0$. Definiere nun für $\sigma\in H$ die Funktion $U^1\left(\sigma\right) := M_1^{-1}\cdot U_\sigma^0\cdot\sigma\left(M_1\right)$. Dann ist $U^1\in Z^1_{cont}\left(H, GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)\right)$. Nach erneuter Anwendung von 3.10 auf U^1 existiert eine Matrix $M_2\in GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)$ mit $v\left(M_2 - I_n\right)\geq\frac{a+1}{2}$ und

$$v\left(M_2^{-1}\cdot U_\sigma^1\cdot\sigma\left(M_2\right) - I_n\right)\geq a+2$$

für alle $\sigma \in H_0$. Es existiert also eine Folge $(M_i)_{i\geq 1}$ in $GL_n(\mathbb{C}_K)$ mit $v(M_i - I_n) \geq \frac{a+i-1}{2}$ und

$$v\left(\left(\prod_{i=1}^{m} M_i\right)^{-1} \cdot U_\sigma \cdot \sigma\left(\prod_{i=1}^{m} M_i\right) - I_n\right) \geq a + m$$

für alle $m \geq 1$ und $\sigma \in H_0$. Nach dem Beweis von 3.10 sind alle M_i ganz, d.h. $v(M_i) \geq 0$ für alle i. Da $\mathbb{C}_K$ vollständig ist und

$$\begin{aligned} v\left(\prod_{i=1}^{m+1} M_i - \prod_{i=1}^{m} M_i\right) = v\left(\prod_{i=1}^{m} M_i \cdot (M_{m+1} - I_n)\right) \geq v\left(\prod_{i=1}^{m} M_i\right) + v(M_{m+1} - I_n) \geq \\ \geq \frac{a+m}{2} \to +\infty \text{ für } m \to +\infty\,, \end{aligned}$$

konvergiert $\left(\prod_{i=1}^{m} M_i\right)_{m\geq 1}$ zunächst gegen eine Matrix $M \in Mat_{\mathbb{C}_K}(n,n)$. Es bleibt noch, zu zeigen, dass $v(M - I_n) \geq \frac{a}{2}$ gilt. Damit ist M dann auch invertierbar. Dazu zeigen wir, dass für alle $m \geq 1$ bereits $v\left(\prod_{i=1}^{m} M_i - I_n\right) \geq \frac{a}{2}$ gilt. Die Behauptung folgt dann durch Grenzwertbildung. Wir führen eine Induktion über m:
Induktionsanfang $m = 1$: Dies folgt mit der Definition von M_1.
Induktionsschritt: Nehme an, dass die Aussage für alle $k < m$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} v\left(\prod_{i=1}^{m} M_i - I_n\right) &= v\left(\prod_{i=1}^{m} M_i - \prod_{i=1}^{m-1} M_i + \prod_{i=1}^{m-1} M_i - I_n\right) \geq \\ &\geq \min\{v\left(\prod_{i=1}^{m} M_i - \prod_{i=1}^{m-1} M_i\right), v\left(\prod_{i=1}^{m-1} M_i - I_n\right)\} \geq \\ &\geq \min\{v\left(\prod_{i=1}^{m-1} M_i\right) + v(M_m - I_n), v\left(\prod_{i=1}^{m-1} M_i - I_n\right)\} \geq \\ &\geq \min\{0 + \frac{a+m-1}{2}, \frac{a}{2}\} \geq \frac{a}{2}\,. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.12. *Es gilt* $H^1_{cont}(H, GL_n(\mathbb{C}_K)) = 1$.

Beweis. Wir zeigen, dass jeder stetige 1-Kozykel $U\colon H \to GL_n(\mathbb{C}_K)$ (kohomologisch) trivial ist. Sei dazu $a > 0$. Dann existiert aus Stetigkeitsgründen eine offene normale Untergruppe $H_0 \trianglelefteq H$ mit $v(U_\sigma - I_n) > a$ für alle $\sigma \in H_0$. Mit 3.11 ist U als Element von $H^1_{cont}(H_0, GL_n(\mathbb{C}_K))$ trivial auf H_0. Betrachte nun die Inflations-Restriktions-Sequenz:

$$1 \to H^1_{cont}\left(H/H_0, GL_n\left(\mathbb{C}_K^{H_0}\right)\right) \xhookrightarrow{inf} H^1_{cont}(H, GL_n(\mathbb{C}_K)) \xrightarrow{res} H^1_{cont}(H_0, GL_n(\mathbb{C}_K))\,.$$

Da $H/H_0 \cong Gal\left(\overline{K}^{H_0} \mid K_\infty\right) \cong Gal\left(\widehat{\overline{K}^{H_0}} = \mathbb{C}_K^{H_0} \mid \widehat{K_\infty} = \mathbb{C}_K^{H}\right)$ (vgl. [5] Kapitel II, Paragraph 9, Satz 9.6) endlich ist, folgt mit Hilbert 90, dass $H^1_{cont}\left(H/H_0, GL_n\left(\mathbb{C}_K^{H_0}\right)\right) = 1$

und die Restriktionsabbildung *res* damit injektiv ist. Damit muss U schon auf ganz H trivial sein. ■

Proposition 3.13. *Die Inflation definiert eine Bijektion:*

$$\mathit{inf}\colon H^1_{cont}\left(\Gamma, GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)\right) \to H^1_{cont}\left(G_K, GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)\right).$$

Beweis. Betrachte die Inflations-Restriktions-Sequenz:

$$1 \to H^1_{cont}\left(\Gamma, GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)\right) \xhookrightarrow{inf} H^1_{cont}\left(G_K, GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)\right) \xrightarrow{res} H^1_{cont}\left(H, GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)\right).$$

Beachte dabei, dass $\widehat{K_\infty} = \mathbb{C}_K^H$ und $\Gamma = G_K/H$ gelten. Mit 3.12 ist $H^1_{cont}\left(H, GL_n\left(\mathbb{C}_K\right)\right) = 1$ und *inf* damit auch surjektiv. ■

3.3.3 Dekomplettierung

Auch hier benötigen wir ein paar grundlegende Resultate sowie eine Definition:

Korollar 3.14. *Es existiert eine von n unabhängige Konstante $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für alle $x \in K_n$ gilt*

$$v\left(p^{-n} \cdot Tr_{K_n|K}\left(x\right)\right) \geq v\left(x\right) - c\,.$$

Beweis. Vgl. [9] Corollary 3. ■

Definition 3.15 (Tate's normalisierte Spurabbildungen)**.** Seien $x \in K_\infty$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Ist $x \in K_{n+m}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, so definiere

$$R_n\left(x\right) := p^{-m} \cdot Tr_{K_{n+m}|K_n}\left(x\right).$$

Bemerkung 3.16 (**1**) $\left(K_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die Familie sämtlicher endlichen Zwischenerweiterungen von $K_\infty|K$. Ist nämlich $K' := K\left(x\right)$ eine solche, so ist $Gal\left(K_\infty \mid K'\right)$ eine offene Untergruppe von $Gal\left(K_\infty \mid K\right) \cong \left(\mathbb{Z}_p, +\right)$. Damit ist $Gal\left(K_\infty \mid K'\right) = Gal\left(K_\infty \mid K_n\right) \cong p^n\mathbb{Z}_p$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$ und somit $K' = K_n$. Insbesondere existiert für $x \in K_\infty$ stets ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in K_n$.
(**2**) Mit der Transitivität der Spurabbildung und

$$\left[K_{n+m} : K_n\right] = \left|Gal\left(K_\infty \mid K_n\right)/Gal\left(K_\infty \mid K_{n+m}\right)\right| = \left|p^n\mathbb{Z}_p/p^{n+m}\mathbb{Z}_p\right| = \left|\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\right| = p^m$$

sieht man, dass die Definition von R_n unabhängig von der Wahl von $m \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in K_{n+m}$ ist. Daher ist $R_n \colon K_\infty \to K_n$ eine wohldefinierte K_n-lineare Abbildung.
(**3**) Mit 3.14 sieht man, dass R_n stetig auf K_∞ ist und sich somit stetig auf $\widehat{K_\infty}$ fortsetzen lässt. Da R_n auf K_n die Identität ist und K_n vollständig ist, gilt $R_n\left(\widehat{K_\infty}\right) = K_n$. Ferner gilt mit 3.14 für alle $x \in \widehat{K_\infty}$:

$$v\left(R_n\left(x\right)\right) \geq v\left(x\right) - c\,.$$

Proposition 3.17. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten:*
*(**1**) Für $X_n := Kern\left(R_n\right) = \{x \in \widehat{K_\infty} \mid R_n\left(x\right) = 0\}$ gilt*

$$\widehat{K_\infty} = K_n \oplus X_n\,.$$

*(**2**) Die K_n-lineare Abbildung $\gamma_n - id_{\widehat{K_\infty}}$ ist bijektiv auf X_n und besitzt ein stetiges Inverses mit*

$$v\left(\left(\gamma_n - id_{\widehat{K_\infty}}\right)^{-1}\left(x\right)\right) \geq v\left(x\right) - d\,,$$

für alle $x \in X_n$ und einer von n unabhängigen Konstante $d > 0$.

Beweis. Vgl. [9] Proposition 6 und 7 sowie [8] Proposition 2 oder direkt [2] Proposition A.97. ■

Lemma 3.18. *Seien c, d die oben genannten Konstanten, $\delta > 0$, $b \geq 2c + 2d + \delta$ und $r \geq 0$. Angenommen $U = I_n + U_1 + U_2$ mit*

$$U_1 \in Mat_{K_r}\left(n,n\right),\ v\left(U_1\right) \geq b - c - d\,,$$
$$U_2 \in Mat_{\widehat{K_\infty}}\left(n,n\right),\ v\left(U_2\right) \geq b' \geq b\,.$$

Dann existiert eine Matrix $M \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ mit $v\left(M - I_n\right) \geq b - c - d$ und

$$M^{-1} \cdot U \cdot \gamma_r\left(M\right) = 1 + V_1 + V_2$$

mit

$$V_1 \in Mat_{K_r}\left(n,n\right),\ v\left(V_1\right) \geq b - c - d\,,$$
$$V_2 \in Mat_{\widehat{K_\infty}}\left(n,n\right),\ v\left(V_2\right) \geq b' + \delta\,.$$

Beweis. Sei $U_2 = R_r\left(U_2\right) + \left(id_{\widehat{K_\infty}} - \gamma_r\right)\left(V\right)$ mit $V := \left(id_{\widehat{K_\infty}} - \gamma_r\right)^{-1}\left(U_2 - R_r\left(U_2\right)\right) \in Mat_{\widehat{K_\infty}}\left(n,n\right)$. Beachte dabei, dass $U_2 - R_r\left(U_2\right)$ Einträge in $X_r = Kern(R_r)$ besitzt. Dann gilt mit 3.14 $v(R_r(U_2)) \geq v(U_2) - c$ sowie mit 3.17

$$\begin{aligned} v(V) &= v\left(\left(id_{\widehat{K_\infty}} - \gamma_r\right)^{-1}(U_2 - R_r(U_2))\right) \geq v(U_2 - R_r(U_2)) - d \geq \\ &\geq \min\{v(U_2), v(R_r(U_2))\} - d \geq v(U_2) - c - d \geq b' - c - d \geq b - c - d \geq \\ &\geq c + d + \delta > 0\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Damit ist $I_n + V$ durch Betrachtung der geometrischen Reihe insbesondere invertierbar und es folgt weiter

$$\begin{aligned} (I_n + V)^{-1} \cdot U \cdot \gamma_r(I_n + V) &= \left(I_n - V + V^2 - V^3 + \ldots\right) \cdot (I_n + U_1 + U_2) \cdot (I_n + \gamma_r(V)) = \\ &= I_n + U_1 + \left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)(V) + U_2 + V_2\,, \end{aligned}$$

wobei $V_2 \in Mat_{\widehat{K_\infty}}(n,n)$ aus allen Termen vom Grad größer oder gleich 2 in $U_1, U_2, V, \gamma_r(V)$ besteht. Es gilt daher

$$\begin{aligned} v(V_2) &\geq \min\{v\left(V^{k_1}\right), v\left(V^{k_2} \cdot U_1\right), v\left(V^{k_3} \cdot U_2\right), v(U_1 \cdot U_2) \mid k_1 \geq 2, k_2, k_3 \geq 1\} \geq \\ &\geq \min\{2 \cdot (b' - c - d), b' + b - 2c - 2d, b' + b - c - d, b' + b - c - d\} \geq \\ &\geq b' + b - 2c - 2d \geq b' + \delta\,. \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $v(\gamma_r(V)) = v(V)$ gilt. Setze nun $V_1 := U_1 + R_r(U_2) \in Mat_{K_r}(n,n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v(V_1) &= v(U_1 + R_r(U_2)) \geq \min\{v(U_1), v(R_r(U_2))\} \geq \\ &\geq \min\{b - c - d, v(U_2) - c\} \geq \min\{b - c - d, b - d\} \geq \\ &\geq b - c - d\,. \end{aligned}$$

Mit $M := I_n + V$ folgt dann die Behauptung. ■

Korollar 3.19. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 3.18 existiert eine Matrix $M \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ mit $v(M - I_n) \geq b - c - d$ und $M^{-1} \cdot U \cdot \gamma_r(M) \in GL_n(K_r)$.*

Beweis. Sei $U_0 := U$ und $U_1 := M_1^{-1} \cdot U \cdot \gamma_r(M_1) = I_n + V_1 + V_2$, wobei $M_1 = M$, V_1 und V_2 die Matrizen aus 3.18 sind. Mit demselben Lemma angewandt auf die Zerlegung von $U_1 = I_n + V_1 + V_2$ existieren nun Matrizen $M_2 \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$, $V_1^{(2)} \in Mat_{K_r}(n,n)$ sowie

$V_2^{(2)} \in Mat_{\widehat{K_\infty}}(n,n)$, sodass

$$\begin{aligned}
&v\left(M_2 - I_n\right) \geq b + \delta - c - d\,,\\
&v\left(V_1^{(2)}\right) \geq b - c - d\,,\\
&v\left(V_2^{(2)}\right) \geq b + 2\delta\,,\\
&\left(M_1 \cdot M_2\right)^{-1} \cdot U_0 \cdot \gamma_r\left(M_1 \cdot M_2\right) = M_2^{-1} \cdot U_1 \cdot \gamma_r\left(M_2\right) = I_n + V_1^{(2)} + V_2^{(2)}\,.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die Ungleichung für M_2 aus (3.3) aus dem Beweis von 3.18. Dort ist dann nämlich $v\left(M_2 - I_n\right) = v\left(V\right) \geq v\left(V_2\right) - c - d \geq b + \delta - c - d$. Induktiv folgt nun die Existenz von Matrizen $M_m \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$, $V_1^{(m)} \in Mat_{\widehat{K_\infty}}(n,n)$ sowie $V_2^{(m)} \in Mat_{K_r}(n,n)$, sodass

$$\begin{aligned}
&v\left(M_m - I_n\right) \geq b + (m-1)\cdot\delta - c - d > 0\,,\\
&v\left(V_1^{(m)}\right) \geq b - c - d\,,\\
&v\left(V_2^{(m)}\right) \geq b + m\cdot\delta\,, &(3.4)\\
&\left(\prod_{i=1}^{m} M_i\right)^{-1} \cdot U_0 \cdot \gamma_r\left(\prod_{i=1}^{m} M_i\right) = I_n + V_1^{(m)} + V_2^{(m)}\,. &(3.5)
\end{aligned}$$

Genauer definiert man wie im Beweis von 3.18 $V_1^{(m)} := V_1^{(m-1)} + R_r\left(V_2^{(m-1)}\right)$, woraus dann aus der Stetigkeit von R_r und (3.4)

$$V_1^{(m)} - V_1^{(m-1)} = R_r\left(V_2^{(m-1)}\right) \longrightarrow 0 \text{ für } m \to +\infty$$

folgt. Damit ist $\left(V_1^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $Mat_{K_r}(n,n)$. Da K_r vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen eine Matrix $V \in Mat_{K_r}(n,n)$ mit $v(V) \geq b - c - d > 0$. Insbesondere ist $I_n + V$ damit invertierbar. Ganz analog wie im Beweis von Korollar 3.11 sieht man, dass $\left(M_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und somit gegen eine weiterhin invertierbare Matrix $M \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ konvergiert. Durch Grenzwertbildung in (3.5) unter Berücksichtigung, dass γ_r stetig auf $\widehat{K_\infty}$ operiert, sieht man dann letztlich

$$M^{-1} \cdot U \cdot \gamma_r(M) = I_n + V \in GL_n\left(K_r\right)\,.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Lemma 3.20. *Sei $d > 0$ die Konstante aus 3.17. Seien ferner $B \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ und $V_1, V_2 \in GL_n\left(K_i\right)$, sodass für ein $r \geq i$*

$$v\left(V_1 - I_n\right), v\left(V_2 - I_n\right) > d \text{ sowie } \gamma_r(B) = V_1 \cdot B \cdot V_2$$

gelten. Dann ist $B \in GL_n\left(K_i\right)$.

Beweis. Sei $C := B - R_i(B)$ und zeige, dass $C = 0$ gilt. Dann ist nämlich $B = R_i(B) \in GL_n(K_i)$. Wir nehmen an, dass $C \neq 0$ ist und führen dies zum Widerspruch. Beachte, dass C Einträge aus $X_i = \left(id_{\widehat{K_\infty}} - R_i\right)\left(\widehat{K_\infty}\right)$ hat und dass R_i eine K_i-lineare Abbildung ist, welche mit γ_r kommutiert. Letzteres liegt daran, dass Γ abelsch ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}\gamma_r(C) - C = \gamma_r(B - R_i(B)) - C &= \gamma_r(B) - R_i(\gamma_r(B)) - C = \\ &= V_1 \cdot B \cdot V_2 - R_i(V_1 \cdot B \cdot V_2) - C = \\ &= V_1 \cdot B \cdot V_2 - V_1 \cdot R_i(B) \cdot V_2 - C = \\ &= V_1 \cdot C \cdot V_2 - C = \\ &= (V_1 - I_n) \cdot C \cdot V_2 + V_1 \cdot C \cdot (V_2 - I_n) - (V_1 - I_n) \cdot C \cdot (V_2 - I_n)\,.\end{aligned}$$

Damit ist, wegen $v(V_1), v(V_2) \geq 0$, dann

$$\begin{aligned}&v\left(\left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)(C)\right) = v(\gamma_r(C) - C) \geq \min\{v(V_1 - I_n) + v(C) + v(V_2)\,, \\ &v(V_1) + v(C) + v(V_2 - I_n)\,, v(V_1 - I_n) + v(C) + v(V_2 - I_n)\} > v(C) + d = \\ &= v\left(\left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)^{-1}\left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)(C)\right) + d\,.\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung können wir 3.17 anwenden, weil $\left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)(C)$ Einträge in X_i hat. Nach einer Umformung erhalten wir

$$v\left(\left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)^{-1}\left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)(C)\right) < v\left(\left(\gamma_r - id_{\widehat{K_\infty}}\right)(C)\right) - d\,.$$

Das widerspricht jedoch dem zweiten Teil von 3.17. Also muss $C = 0$ gelten und die Behauptung folgt. ■

Bemerkung 3.21 Sei $U \in Z^1_{cont}(\Gamma, GL_n(K_\infty))$. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $U(\gamma) \in GL_n(K_i)$. Da U stetig ist und $\Gamma = \{\gamma^a \mid a \in \mathbb{Z}_p\}$ gilt, folgt mit der Stetigkeit von U, dass das Bild von U bereits in $GL_n(K_i)$ liegt.

Proposition 3.22. *Die Inklusion $GL_n(K_\infty) \subseteq GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ induziert eine Bijektion*

$$\iota\colon H^1_{cont}(\Gamma, GL_n(K_\infty)) \longrightarrow H^1_{cont}\left(\Gamma, GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)\right)\,.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Injektivität. Seien dafür $U, U' \in Z^1_{cont}(\Gamma, GL_n(K_\infty))$, die kohomolog sind in $GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$, d.h. es existiert eine Matrix $M \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ mit $M^{-1} \cdot U_\sigma \cdot \sigma(M) = U'_\sigma$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Insbesondere gilt für alle $r \in \mathbb{N}$

$$\gamma_r(M) = U^{-1}_{\gamma_r} \cdot M \cdot U'_{\gamma_r}\,.$$

Da γ_r für große r gegen id_{K_∞} läuft und U, U' stetig sind, laufen $U_{\gamma_r}, U'_{\gamma_r}$ für große r gegen I_n. Sei $i \in \mathbb{N}$ derart, dass U und U' ihr Bild in $GL_n(K_i)$ haben. Wähle dann $r \geq i$ groß genug, sodass

$$v\left(U_{\gamma_r} - I_n\right), v\left(U'_{\gamma_r} - I_n\right) > d$$

gilt. Mit 3.20 ist dann $M \in GL_n(K_i) \subseteq GL_n(K_\infty)$ und $U,\ U'$ bereits kohomolog über $GL_n(K_\infty)$.
Für die Surjektivität nehmen wir uns einen stetigen 1-Kozykel U von Γ nach $GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ und zeigen, dass dieser über $GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ kohomolog ist zu einem 1-Kozykel mit Werten in $GL_n(K_\infty)$. Da U stetig ist, existiert ein $r \in \mathbb{N}$, sodass $v(U_\sigma - I_n) > 2c + 2d$ für alle $\sigma \in \Gamma_r$. Sei dann $\delta > 0$ derart, dass $v\left(U_{\gamma_r} - I_n\right) \geq b := 2c + 2d + \delta$. Dann folgt für $U_{\gamma_r} = I_n + 0_n + U_{\gamma_r} - I_n$ (also $U_1 = 0_n$ und $U_2 = U_{\gamma_r} - I_n$) mit 3.19 die Existenz einer Matrix $M \in GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ mit $v(M - I_n) \geq b - c - d = c + d + \delta$ und

$$U'_{\gamma_r} := M^{-1} \cdot U_{\gamma_r} \cdot \gamma_r(M) \in GL_n(K_r)\ .$$

Definiere nun $U'_\sigma := M^{-1} \cdot U_\sigma \cdot \sigma(M)$ für alle $\sigma \in \Gamma$. Dann ist U' ein stetiger 1-Kozykel mit Werten in $GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$. Sei $\sigma \in \Gamma$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} U'_\sigma \cdot \sigma\left(U'_{\gamma_r}\right) &= M^{-1} \cdot U_\sigma \cdot \sigma(M) \cdot \sigma\left(M^{-1}\right) \cdot \sigma\left(U_{\gamma_r}\right) \cdot (\sigma \cdot \gamma_r)(M) = \\ &= M^{-1} \cdot U_\sigma \cdot \sigma\left(U_{\gamma_r}\right) \cdot (\sigma \cdot \gamma_r)(M) = \\ &= M^{-1} \cdot U_{\sigma \cdot \gamma_r} \cdot (\sigma \cdot \gamma_r)(M) = U'_{\sigma \cdot \gamma_r} = \\ &= U'_{\gamma_r \cdot \sigma} = U'_{\gamma_r} \cdot \gamma_r\left(U'_\sigma\right)\ . \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\gamma_r\left(U'_\sigma\right) = U'^{-1}_{\gamma_r} \cdot U'_\sigma \cdot \sigma\left(U'_{\gamma_r}\right)\ .$$

Für obiges r ist $U'_{\gamma_r} \in GL_n(K_r)$. Da γ_t eine Potenz von γ_r für $t \geq r$ ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $v\left(U'_{\gamma_r} - I_n\right) > d$ gilt. Dann folgt mit 3.20 für $V_1 = U'^{-1}_{\gamma_r}$ und $V_2 = \sigma\left(U'_{\gamma_r}\right)$, dass $U'_\sigma \in GL_n(K_r) \subseteq GL_n(K_\infty)$. Ergo ist U (per Definition) über $GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ kohomolog zu U' mit Werten in $GL_n(K_\infty)$. ■

Theorem 3.23. *Die durch $G_K \twoheadrightarrow \Gamma = G_K/H$ und $GL_n(K_\infty) \hookrightarrow GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ induzierte Abbildung*

$$\eta\colon H^1_{cont}\left(\Gamma, GL_n(K_\infty)\right) \longrightarrow H^1_{cont}\left(G_K, GL_n(\mathbb{C}_K)\right)$$

ist bijektiv.

Beweis. Das folgt aus 3.13 und 3.22. ■

4 Zulässigkeit p-adischer Darstellungen

4.1 Semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellungen von G_K

Wir wenden nun das an, was wir in Abschnitt 3.3 gelernt haben. Sei dazu W eine semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellung von G_K der Dimension n. Definiere

$$\widehat{W_\infty} := W^H = \{w \in W \mid \sigma(w) = w \; \forall \sigma \in H\};$$

da $H \trianglelefteq G_K$, ist $\widehat{W_\infty}$ invariant unter der Operation von G_K. Ferner ist $\widehat{W_\infty}$ ein $\widehat{K_\infty}$-Vektorraum wegen $\mathbb{C}_K^H = \widehat{K_\infty}$ und damit eine $\widehat{K_\infty}$-Darstellung von $\Gamma = G_K/H$.

Theorem 4.1. *Die $\mathbb{C}_K$-lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{C}_K \otimes_{\widehat{K_\infty}} \widehat{W_\infty} &\longrightarrow W \\ c \otimes w &\longmapsto c \cdot w \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, welcher mit den jeweiligen G_K-Operationen verträglich ist.

Beweis. Offensichtlich ist W ebenso eine $\mathbb{C}_K$-Darstellung von H und mit 3.12 trivial als solche. Die Behauptung folgt dann mit Theorem 2.13. ∎

Wir wissen also nun insbesondere, dass $dim_{\widehat{K_\infty}}\left(\widehat{W_\infty}\right) = dim_{\mathbb{C}_K}(W)$ gilt.

Theorem 4.2. *Es existiert ein $r \in \mathbb{N}$ und eine K_r-Darstellung W_r von Γ der Dimension n, sodass die $\widehat{K_\infty}$-lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \widehat{K_\infty} \otimes_{K_r} W_r &\longrightarrow \widehat{W_\infty} \\ c \otimes w &\longmapsto c \cdot w \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist, welcher mit den jeweiligen Operationen von Γ verträglich ist.

Beweis. Sei $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine $\widehat{K_\infty}$-Basis von $\widehat{W_\infty}$ und $U\colon \Gamma \to GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$ der entsprechende stetige 1-Kozykel. Mit 3.22 ist U (über $GL_n\left(\widehat{K_\infty}\right)$) kohomolog zu einem 1-Kozykel U' mit Werten in $GL_n(K_r)$ für ein geeignetes $r \in \mathbb{N}$. Mit 2.11 folgt nun die Existenz einer $\widehat{K_\infty}$-Basis $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ von $\widehat{W_\infty}$, sodass

$$W_r := \bigoplus_{i=1}^{n} K_r \cdot e'_i$$

invariant unter der Operation von Γ ist. Da φ die $\widehat{K_\infty}$-Basis $\{1 \otimes e'_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ von $\widehat{K_\infty} \otimes_{K_r} W_r$ auf die $\widehat{K_\infty}$-Basis B' von $\widehat{W_\infty}$ abbildet, ist φ ein Isomorphismus. Die Verträglichkeit mit den Γ-Operationen ist offensichtlich. ■

Wir fixieren die K_r-Basis $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ von W_r für das weitere Vorgehen.

Definition 4.3. Nenne einen Vektor $w \in \widehat{W_\infty}$ K-endlich, falls $span_K\{\sigma(w) \mid \sigma \in \Gamma\}$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum ist. Setze $W_\infty := \{w \in \widehat{W_\infty} \mid w \text{ ist } K\text{-endlich}\}$.

Bemerkung 4.4 W_∞ ist ein K_∞-Unterraum von $\widehat{W_\infty}$ und Γ operiert auf diesem. Ferner ist $W_r \subseteq W_\infty$.

Wir benötigen das folgende Ergebnis lediglich für das dann folgende Korollar und verweisen für den Beweis auf Sen:

Proposition 4.5. *Sei $W \subseteq \widehat{K_\infty}$ ein endlich-dimensionaler K_r-Unterraum mit $\Gamma_r(W) \subseteq W$. Dann ist $W \subseteq K_\infty$.*

Beweis. Vgl. [8] Proposition 3. ■

Korollar 4.6. *Es gilt $K_\infty \otimes_{K_r} W_r \cong_\Gamma W_\infty$ und damit $\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} W_\infty \cong_{G_K} \widehat{W_\infty}$.*

Beweis. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi\colon K_\infty \otimes_{K_r} W_r &\longrightarrow W_\infty \\ c \otimes w &\longmapsto c \cdot w\,. \end{aligned}$$

Da $W_r \subset W_\infty$, ist φ eine wohldefinierte K_∞-lineare Abbildung, welche verträglich mit den gegebenen Γ- bzw. dadurch induzierten G_K-Operationen ist. φ bildet die K_∞-Basis $\{1 \otimes e'_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ von $K_\infty \otimes_{K_r} W_r$ auf die über K_∞ linear unabhängige Menge

$\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ ab und ist damit injektiv. Da $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ zumindest eine $\widehat{K_\infty}$-Basis von $\widehat{W_\infty}$ ist, existieren für $w \in W_\infty \subseteq \widehat{W_\infty}$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \widehat{K_\infty}$ mit

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e'_i \,.$$

Wir zeigen, dass die Koeffizienten bereits in K_∞ liegen. Da $w \in W_\infty$, ist $span_K\{\sigma(w) \mid \sigma \in \Gamma\}$ endlich-dimensional. Dann muss aufgrund der Eindeutigkeit auch $span_K\{\sigma(\lambda_i) \mid \sigma \in \Gamma\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ endlich-dimensional sein. Mit 4.5 ist dann $span_K\{\sigma(\lambda_i) \mid \sigma \in \Gamma\} \subseteq K_\infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere sind dann $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K_\infty$. Damit ist $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ eine K_∞-Basis von W_∞ und φ bereits bijektiv. Somit erhalten wir die folgende Isomorphie von G_K-Darstellungen:

$$\begin{aligned}\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} W_\infty \cong \widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} (K_\infty \otimes_{K_r} W_r) \cong \left(\widehat{K_\infty} \otimes_{K_\infty} K_\infty\right) \otimes_{K_r} W_r \cong \\ \cong \widehat{K_\infty} \otimes_{K_r} W_r \cong \widehat{W_\infty} \,.\end{aligned}$$

■

4.1.1 Der Sen-Operator

Sei W eine n-dimensionale semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellung von G_K und W_r, W_∞ sowie $\widehat{W_\infty}$ wie bisher. Dann gibt es eine K_r-Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ von W_r, welche auch K_∞-Basis von W_∞, $\widehat{K_\infty}$-Basis von $\widehat{W_\infty}$ sowie $\mathbb{C}_K$-Basis von W ist. Im Beweis von 3.22 sieht man, dass für den zugehörigen stetigen 1-Kozykel $U : \Gamma \to GL_n(K_r) \subseteq GL_n(K_\infty)$

$$v\left(U_{\gamma_r} - I_n\right) > c + d > 0 \tag{4.1}$$

gilt. Bezeichne mit χ den in Abschnitt 3.3 gewählten stetigen Isomorphismus $G_K/H = (\Gamma, \circ) \cong (\mathbb{Z}_p, +)$ sowie seine Komposition mit $G_K \twoheadrightarrow \Gamma$.

Definition 4.7 (Sen's Operator)**.** Der zu W assoziierte Sen-Operator ϕ ist der K_r-Endomorphismus von W_r mit der Darstellungsmatrix

$$\Phi := M_B^B(\phi) = \frac{\log U_{\gamma_r}}{\chi(\gamma_r)} \,.$$

Dabei sei $\log U_{\gamma_r}$ als unendliche Reihe zu verstehen, welche nach (4.1) konvergiert. Mit der Wahl der Basis B kann man ϕ auf W_∞ und W linear fortsetzen. Bezeichne diese Fortsetzungen weiterhin mit ϕ.

Theorem 4.8. *Der Sen-Operator ϕ von W ist der eindeutig bestimmte K_∞-Endomorphis-*

mus auf W_∞, sodass für alle $w \in W_\infty$ eine offene Untergruppe Γ_w von Γ existiert mit

$$\sigma(w) = exp(\phi \cdot \chi(\sigma))(w) \text{ für alle } \sigma \in \Gamma_w . \tag{4.2}$$

Hierbei ist exp als unendliche Reihe zu verstehen, welche in einer offenen Umgebung von $0 \in End_{K_\infty}(W_\infty)$ bzw. $0 \in Mat_{K_\infty}(n,n)$ konvergiert.

Beweis. Sei $w \in W_\infty$ und $w = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot e_i$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K_\infty$. Dann existiert ein $s \in \mathbb{N}$, sodass $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K_s$. Setze $\Gamma_w := \Gamma_r \cap \Gamma_s$. Dann gibt es für jedes $\sigma \in \Gamma_w \subseteq \Gamma_r$ ein eindeutiges $a \in \mathbb{Z}_p$, sodass $\sigma = \gamma_r^a$. Wegen $U_{\gamma_r} \in GL_n(K_r)$ gilt $U_{\gamma_r^2} = U_{\gamma_r} \cdot \gamma_r(U_{\gamma_r}) = U_{\gamma_r}^2$ und induktiv $U_{\gamma_r^n} = U_{\gamma_r}^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da U und χ stetig sind, erhalten wir

$$U_\sigma = U_{\gamma_r}^a \text{ und } \chi(\sigma) = a \cdot \chi(\gamma_r) .$$

Daher folgt für alle $\sigma \in \Gamma_w$ bezüglich der Basis B

$$\begin{aligned} exp(\Phi \cdot \chi(\sigma)) &= exp\left(a \cdot \frac{\log U_{\gamma_r}}{\chi(\gamma_r)} \cdot \chi(\gamma_r)\right) = \\ &= exp(\log(U_\sigma)) = U_\sigma . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Um die Konvergenz der Exponentialreihe zu garantieren, schränken wir uns dabei ohne Einschränkung gegebenenfalls weiter auf eine offene Untergruppe von Γ_w ein. Per Definition ist die Operation von σ auf $w \in W_\infty$ gegeben durch U_σ. Denn ist $[w]_B \in K_\infty^n$ der Koordinatenvektor von w bezüglich der Basis B, so gilt

$$[\sigma(w)]_B = U_\sigma \cdot [w]_B .$$

Daher folgt

$$\sigma(w) = exp(\phi \cdot \chi(\sigma))(w)$$

für alle $\sigma \in \Gamma_w$. Für die Eindeutigkeit von ϕ seien erneut $\sigma \in \Gamma_w,\ a \in \mathbb{Z}_p$ mit $\sigma = \gamma_r^a$. Da die Operation von σ auf $w \in W_r$, wie bereits angemerkt, gegeben ist durch U_σ, folgt aus (4.2), dass diese Operation auch gegeben ist durch $M_B^B(exp(\phi \cdot \chi(\sigma))) = exp(\Phi \cdot \chi(\sigma))$. Da $w \in W_r$ beliebig war, folgt

$$U_{\gamma_r}^a = U_\sigma = exp(\Phi \cdot \chi(\sigma)) ,$$

woraus, nach Anwendung des Logarithmus schließlich

$$\Phi = \frac{\log U_\sigma}{\chi(\sigma)} = \frac{a \cdot \log U_{\gamma_r}}{a \cdot \chi(\gamma_r)} = \frac{\log U_{\gamma_r}}{\chi(\gamma_r)} \tag{4.4}$$

folgt. ■

Bemerkung 4.9 (**1**) Mit (4.4) aus dem Beweis von 4.8 sieht man, dass

$$\Phi = \frac{\log U_\sigma}{\chi(\sigma)}$$

für alle $\sigma \in \Gamma_r$, d.h. der Sen-Operator ϕ ist unabhängig von der Wahl von γ_r.
(**2**) Durch die Betrachtung der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion *exp* zeigt (4.2), dass

$$\phi(w) = \frac{1}{\chi(\gamma)} \lim_{t \to 0} \frac{\gamma^t(w) - w}{t}$$

für alle $w \in W_\infty$ gilt. Insbesondere kommutieren Γ und ϕ auf W_∞ und damit G_K und ϕ auf W.
(**3**) Für $w \in W_\infty$ gilt $\phi(w) = 0$ genau dann, wenn $\Gamma(w) := \{\sigma(w) \mid \sigma \in \Gamma\}$ endlich ist.

Beweis. Definiere $A := \chi(\sigma) \cdot \phi$ für $\sigma \in \Gamma_w$. Dann ist mit 4.8

$$\sigma(w) = exp(A)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n(w) \; .$$

Ist nun $\phi(w) = 0$, so ist auch $A^n(w) = 0$ für alle $n \geq 1$. Damit ist also $\sigma(w) = w$ für alle $\sigma \in \Gamma_w$. Also gilt $\Gamma_w \leq Stab_\Gamma(w) \leq \Gamma$. Da Γ_w in Γ offen ist und dort endlichen Index besitzt, gilt dies auch für $Stab_\Gamma(w)$ in Γ. Damit ist dann $|\Gamma(w)| = |\Gamma / Stab_\Gamma(w)|$ endlich. Sei umgekehrt $|\Gamma(w)| = |\Gamma / Stab_\Gamma(w)|$ endlich. Damit ist $Stab_\Gamma(w) \leq \Gamma$ offen und wie wir bereits wissen dann $Stab_\Gamma(w) = \Gamma_s$ für ein geeignetes $s \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt für alle $k \geq s$ dann $\gamma^{p^k}(w) = w$ und somit

$$\lim_{t \to 0} \frac{\gamma^t(w) - w}{t} = 0 \, .$$

Mit (**2**) ist dann $\phi(w) = 0$. ■

(**4**) Sei W' eine weitere semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellung von G_K und ϕ' der entsprechende Sen-Operator. Man rechnet für die beiden semilinearen $\mathbb{C}_K$-Darstellungen $W \oplus W'$ und $W \otimes_{\mathbb{C}_K} W'$ nach, dass $(W \oplus W')_\infty = W_\infty \oplus W'_\infty$ und $(W \otimes_{\mathbb{C}_K} W')_\infty = W_\infty \otimes_{K_\infty} W'_\infty$ gilt. Dann sind die Sen-Operatoren von $W \oplus W'$ und $W \otimes_{\mathbb{C}_K} W'$ gegeben durch $\phi \oplus \phi'$ und $\phi \otimes id_{W'} + id_W \otimes \phi'$.

Beweis. Das folgt direkt aus Theorem 4.8 und bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} &exp\left(\left(\phi \oplus \phi'\right) \cdot \chi\left(\sigma\right)\right) = exp\left(\phi \cdot \chi\left(\sigma\right)\right) \oplus exp\left(\phi' \cdot \chi\left(\sigma\right)\right) \ , \\ &exp\left(\left(\phi \otimes id_{W'} + id_W \otimes \phi'\right) \cdot \chi\left(\sigma\right)\right) = exp\left(\phi \cdot \chi\left(\sigma\right)\right) \otimes exp\left(\phi' \cdot \chi\left(\sigma\right)\right) \ . \end{aligned}$$

Letzteres gilt dabei, weil $\phi \otimes id_{W'}$ und $id_W \otimes \phi'$ kommutieren. ∎

(**5**) Seien $f \in Hom_{\mathbb{C}_K}\left(W, W'\right)$ und $\sigma \in G_K$. Definiere $\sigma\left(f\right) \in Hom_{\mathbb{C}_K}\left(W, W'\right)$ durch

$$\left[\sigma\left(f\right)\right]\left(w\right) := \sigma\left(f\left(\sigma^{-1}\left(w\right)\right)\right)$$

für alle $w \in W$. Man rechnet leicht nach, dass $Hom_{\mathbb{C}_K}\left(W, W'\right)$ dadurch eine semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellung von G_K wird. Sind wieder ϕ und ϕ' die Sen-Operatoren zu W und W', so ist der zu $Hom_{\mathbb{C}_K}\left(W, W'\right)$ gehörige Sen-Operator ϕ_{Hom} gegeben durch

$$\phi_{Hom}\left(f\right) = \phi' \circ f - f \circ \phi$$

für alle $f \in Hom_{\mathbb{C}_K}\left(W, W'\right)$.

Beweis. Mit (4.2) für t groß genug und $w \in W_\infty$ folgt

$$\gamma^t\left(w\right) = w + t \cdot \chi\left(\gamma\right) \cdot \phi\left(w\right) + \mathcal{O}\left(t^2\right) \ . \tag{4.5}$$

Gleichermaßen gilt natürlich

$$\gamma^{-t}\left(w\right) = w - t \cdot \chi\left(\gamma\right) \cdot \phi\left(w\right) + \mathcal{O}\left(t^2\right) \ .$$

Darauf f angewandt liefert

$$f\left(\gamma^{-t}\left(w\right)\right) = f\left(w\right) - t \cdot \chi\left(\gamma\right) \cdot \left(f \circ \phi\right)\left(w\right) + \mathcal{O}\left(t^2\right) \ .$$

Dies ist äquivalent zu

$$f\left(w\right) = f\left(\gamma^{-t}\left(w\right)\right) + t \cdot \chi\left(\gamma\right) \cdot \left(f \circ \phi\right)\left(w\right) - \mathcal{O}\left(t^2\right) \ . \tag{4.6}$$

Analog zu (4.5) erhält man für $f\left(w\right) \in W'$

$$\left(\gamma^t \circ f\right)\left(w\right) = \gamma^t\left(f\left(w\right)\right) = f\left(w\right) + t \cdot \chi\left(\gamma\right) \cdot \phi'\left(f\left(w\right)\right) + \mathcal{O}\left(t^2\right) \ . \tag{4.7}$$

Wendet man nun γ^t auf (4.6) an, so erhält man

$$\gamma^t\left(f\left(\gamma^{-t}(w)\right)\right)+t\cdot\chi(\gamma)\cdot\gamma^t(f\circ\phi)(w)-\mathcal{O}\left(t^2\right)=$$
$$=f(w)+t\cdot\chi(\gamma)(\phi'\circ f)(w)+\mathcal{O}\left(t^2\right).$$

Umgeformt erhalten wir dann

$$\frac{1}{\chi(\gamma)}\cdot\frac{[\gamma^t(f)](w)-f(w)}{t}=\left(\phi'\circ f-\gamma^t(f\circ\phi)\right)(w)+\mathcal{O}(t)\ .$$

Lassen wir t nun p-adisch gegen 0 laufen, erhalten wir wegen $\gamma^t\to id_{K_\infty}$ letztlich die Behauptung aus Bemerkung 4.9 (**2**). ■

(**6**) Ist $W'\leq W$ eine Teildarstellung von G_K, d.h. W' ist ein $\mathbb{C}_K$-Unterraum von W und invariant unter der Operation von G_K, so ist $\phi_{|W'}$ der Sen-Operator von W'.

Proposition 4.10. *Es existiert eine K_∞-Basis B' von W_∞, sodass die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich B' Koeffizienten in K hat.*

Beweis. Nach Teil (**2**) aus Bemerkung 4.9 gilt $\sigma\circ\phi=\phi\circ\sigma$ für alle $\sigma\in\Gamma$. Damit gilt dann bezüglich der Basis B, da σ semilinear operiert,

$$U_\sigma\cdot\sigma(\Phi)=\Phi\cdot U_\sigma\,.$$

Das ist äquivalent zu

$$U_\sigma\cdot\sigma(\Phi)\cdot U_\sigma^{-1}=\Phi\,,$$

womit $\sigma(\Phi)$ und Φ für alle $\sigma\in\Gamma$ ähnlich (über K_∞) zueinander sind und damit dieselbe rationale Jordan-Normalform besitzen. Man sieht jedoch leicht, wenn $R\in Mat_{K_\infty}(n,n)$ die Normalform von Φ ist, so ist $\sigma(R)$ die Normalform von $\sigma(\Phi)$. Also gilt für alle $\sigma\in\Gamma=Gal(K_\infty\mid K)$

$$\sigma(R)=R\,,$$

also $R\in Mat_K(n,n)$. ■

Theorem 4.11. *Es gilt $Kern(\phi)=W^{G_K}\otimes_K\mathbb{C}_K$.*

Beweis. Sei $X:=Kern(\phi)$. Wegen $W^{G_K}\subseteq W_\infty$ zeigt Bemerkung 4.9 (**2**), dass $W^{G_K}\subseteq X$. Da X ein $\mathbb{C}_K$-Unterraum von W ist, gilt auch $span_{\mathbb{C}_K}\left(W^{G_K}\right)\subseteq X$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass X eine $\mathbb{C}_K$-Basis in W^{G_K} besitzt. Da ϕ und G_K kommutieren, ist X G_K-invariant und damit selbst eine semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellung von G_K. Es gelten also die bisherigen Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 und wir können über $X_\infty \subseteq X$ reden. Da $X \cong \mathbb{C}_K \otimes_{K_\infty} X_\infty$, genügt es, eine K_∞-Basis von X_∞ zu finden, welche von Γ fixiert wird. Sei $w \in X_\infty$. Dann ist wegen $\phi_{|X_\infty} \equiv 0$ nach Teil (**3**) aus 4.9 der Γ-Orbit von w endlich. Damit ist die Γ-Operation auf X_∞ stetig, falls man X_∞ mit der diskreten Topologie versieht. Mit 2.12 ist die K_∞-Darstellung X_∞ von Γ trivial und besitzt damit eine K_∞-Basis in $X_\infty^\Gamma \subseteq W^{G_K}$. ■

Theorem 4.12. *Seien W^1, W^2 zwei $\mathbb{C}_K$-Darstellungen von G_K und ϕ^1, ϕ^2 die entsprechenden Sen-Operatoren. Dann sind W^1 und W^2 genau dann G_K-isomorph, wenn ϕ^1 und ϕ^2 ähnlich zueinander sind.*

Beweis. Sei $W := Hom_{C_K}(W^1, W^2)$ und ϕ_{Hom} der entsprechende Sen-Operator (vgl. Bemerkung 4.9 (**5**)). Dass W^1 und W^2 G_K-isomorph sind, bedeutet, dass es einen $\mathbb{C}_K$-Isomorphismus $F\colon W^1 \to W^2$ gibt mit

$$\begin{aligned} & \sigma \circ F = F \circ \sigma \\ \Leftrightarrow\ & \sigma \circ F \circ \sigma^{-1} = F \\ \Leftrightarrow\ & \sigma(F) = F \text{ für alle } \sigma \in G_K \\ \Leftrightarrow\ & F \in W^{G_K}\,. \end{aligned}$$

Dass ϕ^1 und ϕ^2 ähnlich zueinander sind, bedeutet, dass es einen $\mathbb{C}_K$-Isomorphismus $f\colon W^1 \to W^2$ gibt mit

$$\begin{aligned} & f^{-1} \circ \phi^2 \circ f = \phi^1 \\ \Leftrightarrow\ & \phi^2 \circ f - f \circ \phi^1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \phi_{Hom}(f) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f \in Kern(\phi_{Hom}) = \mathbb{C}_K \otimes_K W^{G_K}\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Hinrichtung der Behauptung klar, da mit der üblichen Identifikation $W^{G_K} \subseteq \mathbb{C}_K \otimes_K W^{G_K}$ gilt. Für die Rückrichtung sei $f \in \mathbb{C}_K \otimes_K W^{G_K}$ ein Isomorphismus. Gesucht ist ein bijektives $F \in W^{G_K}$. Wähle eine K-Basis $B = \{f_1, \ldots, f_m\}$ von W^{G_K}. Dann ist B auch eine $\mathbb{C}_K$-Basis von $\mathbb{C}_K \otimes_K W^{G_K}$ und es existieren Elemente $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}_K$, sodass

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i\,.$$

Da f ein Isomorphismus ist, gilt also

$$\det(f) = \det\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i\right) \neq 0\,. \tag{4.8}$$

Mit $f_1, \ldots, f_m \in Hom_{\mathbb{C}_K}(W^1, W^2)$, ist

$$P := \det\left(\sum_{i=1}^{m} t_i \cdot f_i\right) \in \mathbb{C}_K[t_1, \ldots, t_m]\,.$$

Aus (4.8) folgt dann $P \neq 0$. Da $|K| = \infty$, existieren Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ mit $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$. Damit ist $F := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i \in W^{G_K}$ der gesuchte $\mathbb{C}_K$-Isomorphismus. ∎

4.1.2 Das Hauptresultat

Sei V eine d-dimensionale p-adische Darstellung von G_K und B eine $\mathbb{Q}_p$-Basis von V. Nach dem Übergang zu Darstellungsmatrizen bezüglich B sei $\rho\colon G_K \to GL_d(\mathbb{Q}_p)$ der zur Darstellung V assoziierte stetige Gruppenhomomorphismus. Sei ferner $W := \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ die zu V assoziierte semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellung von G_K.

Lemma 4.13. *Sei $L \mid K$ galoisch mit $L \subseteq \overline{K}$. Sei weiter $G = Gal(L \mid K)$ eine p-adische Lie-Gruppe und $\{G(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lie-Filtrierung von G. Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert eine stetige Funktion $\lambda\colon G(n) \to \mathbb{Q}_p$ und ein Element $x \in \widehat{L}$ sowie ein $m \in \mathbb{Z}$, sodass*

$$v(\lambda(\sigma) - (\sigma - id_L)(x)) \geq m \text{ für alle } \sigma \in G(n)\,.$$

Dann existiert eine Konstante c (unabhängig von n) mit

$$v(\lambda(\sigma)) \geq m - c \text{ für alle } \sigma \in G(n)\,.$$

Beweis. Für den Begriff der Lie-Filtrierung sei auf [6] verwiesen. Für den Beweis vgl. [7] Lemma 3. ∎

Im folgenden Theorem betrachten wir den Sen-Operator ϕ von W und die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von $\rho(G_K)$, wobei $\rho(G_K)$ als abgeschlossene Untergruppe von $GL_d(\mathbb{Q}_p)$ eine Lie-Gruppe ist. Mit dem lokalen Homeomorphismus zwischen einer Lie-Gruppe und ihrer Lie-Algebra (vgl. [1] Chapter III, Paragraph 7, Propositionen 3 und 10) sieht man dann, dass $\mathfrak{g}$ als

$\mathbb{Q}_p$-Vektorraum durch alle Bilder von Elementen in einer genügend kleinen Umgebung von I_d erzeugt wird. Möglich ist zum Beispiel

$$\mathfrak{g} = span_{\mathbb{Q}_p}\left(\{\log U_\sigma \mid v\left(U_\sigma - I_d\right) \geq m\}\right) , \tag{4.9}$$

für ein beliebiges $m \geq 2$. Wir beschränken uns im folgenden Theorem auf $m = 2$.

Theorem 4.14. *Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von $\rho\left(G_K\right) \leq GL_d\left(\mathbb{Q}_p\right)$ ist der kleinste $\mathbb{Q}_p$-Unterraum $S \leq Mat_{\mathbb{Q}_p}\left(d,d\right)$, sodass $M_B^B\left(\phi\right) \in \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} S$.*

Beweis. Schreibe $U_\sigma := U\left(\sigma\right)$ für $\sigma \in G_K$. Nach Proposition 4.10 existiert eine K_∞-Basis B' von W_∞, sodass $\Phi := M_{B'}^{B'}\left(\phi\right)$ in $Mat_K\left(d,d\right)$ liegt. Sei $U' \in Z^1_{cont}\left(\Gamma, GL_d\left(K_\infty\right)\right)$ der zu B' assoziierte Kozykel. Da $\Gamma = G_K/H$, lässt sich U' auch als Kozykel auf G_K auffassen und es gilt insbesondere $U'_\sigma = I_d$ für alle $\sigma \in H$. Sei $M := M_{B'}^B\left(id_W\right)$. Dann gilt

$$M^{-1} \cdot U'_\sigma \cdot \sigma\left(M\right) = U_\sigma$$

für alle $\sigma \in G_K$. Sei ferner A die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis B. Dann gilt

$$A = M_B^B\left(\phi\right) = M^{-1} \cdot \Phi \cdot M\,.$$

Per Dualität ist die Aussage des Theorems äquivalent zu der folgenden Aussage:
Ist $f \in Hom_{\mathbb{Q}_p}\left(Mat_{\mathbb{Q}_p}\left(d,d\right), \mathbb{Q}_p\right)$ und $\tilde{f}$ die $\mathbb{C}_K$-lineare Fortsetzung von f, so gilt stets

$$\mathfrak{g} \leq Kern\left(f\right) \;\Leftrightarrow\; A \in Kern\left(\tilde{f}\right) = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} Kern\left(f\right) . \tag{4.10}$$

Ist nämlich die Aussage des Theorems wahr, so folgt aus $\mathfrak{g} \leq Kern\left(f\right)$ stets $A \in \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g} \leq Kern\left(\tilde{f}\right)$. Und ist $A \in Kern\left(\tilde{f}\right) = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} Kern\left(f\right)$, so folgt aus Gründen der Minimalität, dass $\mathfrak{g} \leq Kern\left(f\right)$.
Ist umgekehrt (4.10) wahr, so schreibe $\mathfrak{g} = \bigcap_{i=1}^r Kern\left(f_i\right)$ mit geeigneten Funktionen $f_i \in Hom_{\mathbb{Q}_p}\left(Mat_{\mathbb{Q}_p}\left(d,d\right), \mathbb{Q}_p\right)$. Aus (4.10) folgt dann

$$A \in \bigcap_{i=1}^r Kern\left(\tilde{f}_i\right) = \bigcap_{i=1}^r \left(\mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} Kern\left(f_i\right)\right) = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \left(\bigcap_{i=1}^r Kern\left(f_i\right)\right) = \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{g}\,.$$

Für die behauptete Minimalitätseigenschaft sei $S \leq Mat_{\mathbb{Q}_p}\left(d,d\right)$ ein $\mathbb{Q}_p$-Untervektorraum mit $A \in \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} S$. Wie eben schreiben wir $S = \bigcap_{i=1}^r Kern\left(g_i\right)$. Wegen $A \in \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} S = \bigcap_{i=1}^r Kern\left(\tilde{g}_i\right)$ liefert (4.10) die Inklusion $\mathfrak{g} \leq \bigcap_{i=1}^r Kern\left(g_i\right) = S$.

Mit (4.9) ist für $f \in Hom_{\mathbb{Q}_p}\left(Mat_{\mathbb{Q}_p}(d,d), \mathbb{Q}_p\right)$ Folgendes zu zeigen:

$$f(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(\log U_\sigma) = 0 \;\forall \sigma \in G_K :\; v(U_\sigma - I_d) \geq 2\,. \tag{4.11}$$

Dazu definieren wir für $n \geq 2$

$$G_n := \{\sigma \in G_K \mid v(U_\sigma - I_d) \geq n \text{ und } v(\chi(\sigma)\cdot\Phi) \geq n\}\,,$$
$$G_\infty := \cap_{n\geq 2} G_n = \{\sigma \in G_K \mid U_\sigma = I_d \text{ und } \chi(\sigma) = 0\} = Kern(\rho) \cap H\,.$$

Dann ist $G_n \trianglelefteq G_m$ für alle $n \geq m$. Insbesondere ist $G_\infty \trianglelefteq G_n$ für alle $n \geq 2$. Definiere daher $\check{G} := G_2/G_\infty$ und $\check{G}_m := G_m/G_\infty$ für $m \geq 2$. Da offenbar $G_\infty \leq Kern(\rho)$ gilt, lässt sich $\check{G}$ vermöge ρ als abgeschlossene Untergruppe von $\rho(G_K)$ auffassen und ist damit selbst eine p-adische Lie-Gruppe. Dann bildet die Familie $\left(\check{G}_n\right)_{n\geq 2}$ eine absteigende Familie offener Normalteiler von $\check{G}$ und man sieht, dass dies sogar eine Lie-Filtrierung von $\check{G}$ ist. Setze nun $L := \overline{K}^{G_\infty}$. Dann ist nach Proposition 3.7 $\widehat{L} = \mathbb{C}_K^{G_\infty}$. Wie bereits oben ausgenutzt, gilt für $\sigma \in G_\infty = Kern(\rho) \cap H$:

$$M^{-1}\cdot\sigma(M) = M^{-1}\cdot U_\sigma\cdot\sigma(M) = U'_\sigma = I_d\,.$$

Also ist $\sigma(M) = M$ für alle $\sigma \in G_\infty$ und somit $M \in GL_n\left(\widehat{L}\right)$. Wegen $A = M\cdot\Phi\cdot M^{-1}$ gilt dies auch für A. Wir können also von nun an innnerhalb von $\widehat{L}$ arbeiten. Unser Ziel ist es nun, Lemma 4.13 gleich auf zwei Weisen auf eine geeignete Ungleichung anzuwenden, um die Äquivalenz in (4.11) zu zeigen. Sei dazu $n_0 \geq 2$, sodass für alle $n \geq n_0$ Folgendes gilt:

$$U'_\sigma = exp(\chi(\sigma)\cdot\Phi) \text{ für alle } \sigma \in \check{G}_n\,.$$

Der Ausdruck ist wohldefiniert, da $G_\infty \leq H = Kern(\chi)$ und U' (nach Inflation) trivial auf H ist. Wir können M gegen $p^s\cdot M$ austauschen und daher ohne Einschränkung annehmen, dass M ganz ist (also Einträge in $\mathcal{O}_{\widehat{L}}$ besitzt). Genauso können wir mit f verfahren und es gegebenenfalls gegen $p^t\cdot f$ austauschen und annehmen, dass $f(X)$ für jede ganze Matrix X selbst ganz ist. Für $n \geq n_0$ und $\sigma \in \check{G}_n$ gilt:

$$U'_\sigma = exp(\chi(\sigma)\cdot\Phi) = I_d + \sum_{i\geq 1}\frac{(\chi(\sigma)\cdot\Phi)^i}{i!} \tag{4.12}$$

und damit

$$v(U'_\sigma - I_d) \geq n\,,$$

da $v(\chi(\sigma)\cdot\Phi) \geq n$ gilt. Da für $\sigma \in \check{G}_n$ auch $v(U_\sigma - I_d) \geq n$ gilt, folgt aus $M\cdot U_\sigma =$

$U'_\sigma \cdot \sigma(M)$ und $v(M) = v(\sigma(M)) \geq 0$, dass

$$v(\sigma(M) - M) = v((I_d - U'_\sigma) \cdot \sigma(M) + U'_\sigma \cdot \sigma(M) - M \cdot U_\sigma - M \cdot (I_d - U_\sigma)) \geq n\,.$$

Definiere für $n \geq 2$ die Fixkörper $L_n := L^{\check{G}_n} = \overline{K}^{G_n}$. Wir erhalten also eine Körperkette $K \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L \subseteq \overline{K}$. Mit der letzten Ungleichung folgt nun mit Proposition 3.5 für alle $n \geq n_0$ die Existenz einer Matrix $M_n \in Mat_{L_n}(d,d)$, sodass

$$v(M - M_n) \geq n - \frac{p}{(p-1)^2} \geq n - 2\,. \tag{4.13}$$

Insbesondere ist M_n ganz und es gilt $\sigma(M_n) = M_n$ für alle $\sigma \in \check{G}_n$. Sei weiterhin $n \geq n_0$ und $\sigma \in \check{G}_n$. Dann folgt aus der Reihenentwicklung des Logarithmus und der Definition von $\check{G}_n$

$$v(\log U_\sigma - (U_\sigma - I_d)) = v\left(\sum_{k\geq 2} (-1)^{k+1} \cdot \frac{(U_\sigma - I_d)^k}{k}\right) \geq 2n - 1$$

sowie aus (4.12)

$$v(U'_\sigma - I_d - \chi(\sigma) \cdot \Phi) = v\left(\sum_{k\geq 2} \frac{(\chi(\sigma) \cdot \Phi)^k}{k!}\right) \geq 2n - 1\,.$$

Da M und $\sigma(M)$ ganz sind, folgt dann aus $M \cdot U_\sigma = U'_\sigma \cdot \sigma(M)$

$$\begin{aligned} &v(M + M \cdot \log U_\sigma - (\sigma(M) + \chi(\sigma) \cdot \Phi \cdot \sigma(M))) = \\ &= v(M - M \cdot U_\sigma + M \cdot \log U_\sigma - (\sigma(M) - U'_\sigma \cdot \sigma(M) + \chi(\sigma) \cdot \Phi \cdot \sigma(M))) = \\ &= v(M \cdot (I_d - U_\sigma + \log U_\sigma) - (I_d - U'_\sigma + \chi(\sigma) \cdot \Phi) \cdot \sigma(M)) \geq 2n - 1\,. \end{aligned}$$

Da $v(\log U_\sigma) \geq n$ und $v(\chi(\sigma) \cdot \Phi) \geq n$, folgt daraus

$$v(M + M_n \cdot \log U_\sigma) \geq \min\{v(M + M \cdot \log U_\sigma), v((M - M_n) \cdot \log U_\sigma)\} \geq 2n - 1$$

sowie

$$\begin{aligned} &v(\sigma(M) + \chi(\sigma) \cdot \Phi \cdot M_n) \geq \\ &\geq \min\{v(\sigma(M) + \chi(\sigma) \cdot \Phi \cdot \sigma(M)), v(\chi(\sigma) \cdot \Phi \cdot (\sigma(M) - \sigma(M_n)))\} \geq 2n - 1 \end{aligned}$$

und damit letztlich

$$v(M + M_n \cdot \log U_\sigma - (\sigma(M) + \chi(\sigma) \cdot \Phi \cdot M_n)) \geq 2n - 1\,. \tag{4.14}$$

Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{N}_0$ (minimal) derart, dass $p^{r_1-1} \cdot M^{-1}$ und $p^{r_2} \cdot \Phi$ ganze Matrizen sind. Das heißt also, dass $v\left(M^{-1}\right) \geq -(r_1-1)$ und $v\left(\Phi\right) \geq -r_2$. Da $\lim_{n\to\infty} M_n = M$ und M invertierbar ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \det\left(M_n\right) = det\left(M\right) \neq 0$. Also existiert ein $r' \in \mathbb{N}$, sodass M_n invertierbar ist für alle $n \geq r'$. Ferner konvergiert $\left(M_n^{-1}\right)_{n\geq r'}$ gegen M^{-1}. Es existiert also ein $r'' \geq r'$, sodass $v\left(M_n^{-1}\right) = v\left(M^{-1}\right)$ für alle $n \geq r''$. Sei nun $n \geq r := \max\{n_0, r'', 2r_1 + r_2 + 2\}$. Dann folgt aus (4.14) nach Multiplikation von links mit M_n^{-1}

$$v\left(C_n + \log U_\sigma - \left(\sigma\left(C_n\right) + \chi(\sigma) \cdot M_n^{-1} \cdot \Phi \cdot M_n\right)\right) \geq 2n - r_1 \tag{4.15}$$

mit $C_n := M_n^{-1} \cdot M$. Für C_n folgt aus (4.13) dann $v\left(C_n - I_d\right) = v\left(M_n^{-1} \cdot M - M_n^{-1} \cdot M_n\right) = v\left(M_n^{-1} \cdot \left(M - M_n\right)\right) \geq n - r_1 - 1$. Definiere $A_n := M_n^{-1} \cdot \Phi \cdot M_n$. Dann folgt aus $\Phi \in Mat_K\left(d, d\right) \subseteq Mat_{L_n}\left(d, d\right)$ und $M_n \in GL_d\left(L_n\right)$, dass $\sigma\left(A_n\right) = A_n$ für alle $\sigma \in \check{G}_n$. Ferner gilt

$$A_n - A = M_n^{-1} \cdot \left(M - M_n\right) \cdot M^{-1} \cdot \Phi \cdot M_n + M^{-1} \cdot \Phi \cdot \left(M_n - M\right) .$$

Damit sieht man dann, dass

$$\begin{aligned} v\left(A_n - A\right) &\geq \min\{v\left(M_n^{-1} \cdot \left(M - M_n\right) \cdot M^{-1} \cdot \Phi \cdot M_n\right), v\left(M^{-1} \cdot \Phi \cdot \left(M_n - M\right)\right)\} \geq \\ &\geq \min\{n - (2r_1 + r_2 + 2), n - (r_1 + r_2 - 1)\} \geq n - r \end{aligned}$$

Nach der Multiplikation mit $\chi(\sigma)$ folgt ähnlich wie in der letzten Ungleichung

$$v\left(\chi(\sigma) \cdot A_n - \chi(\sigma) \cdot A\right) \geq 2n - r . \tag{4.16}$$

Forme nun (4.15) um zu

$$v\left(\left(\sigma - id_L\right)\left(C_n\right) - \left(\log U_\sigma - \chi(\sigma) \cdot A_n\right)\right) \geq 2n - r_1 \geq 2n - r .$$

Setze jetzt die Kongruenz (4.16) ein und erhalte

$$v\left(\left(\sigma - id_L\right)\left(C_n\right) - \left(\log U_\sigma - \chi(\sigma) \cdot A\right)\right) \geq 2n - r .$$

Zuletzt wenden wir darauf noch unser $f \in Hom_{\mathbb{Q}_p}\left(Mat_{\mathbb{Q}_p}\left(d, d\right), \mathbb{Q}_p\right)$ an und sehen, dass

$$v\left(\left(\sigma - id_L\right) f\left(C_n\right) - \left(f\left(\log U_\sigma\right) - \chi(\sigma) \cdot f\left(A\right)\right)\right) \geq 2n - r , \tag{4.17}$$

wobei wir verwenden, dass f ganze Matrizen respektiert. Jetzt sind wir soweit, Lemma 4.13 zu nutzen. Sei also $f\left(A\right) = 0$. Dann folgt aus (4.17)

$$v\left(\left(\sigma - id_L\right) f\left(C_n\right) - f\left(\log U_\sigma\right)\right) \geq 2n - r$$

für alle $\sigma \in \check{G}_n$. Mit $x = f(C_n)$ und $\lambda = f(\log U_\bullet)$ folgt dann aus Lemma 4.13 die Existenz einer von n unabhängigen Konstanten c mit

$$v\left(f\left(\log U_\sigma\right)\right) \geq 2n - r - c$$

für alle $\sigma \in \check{G}_n$. Ist nun $\sigma \in G_K$ mit $v(U_\sigma - I_d) \geq 2$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ (unabhängig von n), sodass $\sigma^{p^k} \in G_2$. Sei σ' das Bild von σ^{p^k} in $\check{G}$. Dann ist $(\sigma')^{p^{n-2}} \in \check{G}_n$. Es folgt also

$$v\left(f\left(\log U_{\sigma'^{p^{n-2}}}\right)\right) = v\left(p^{n-2+k} \cdot f\left(\log U_\sigma\right)\right) \geq 2n - r\,.$$

Damit ergibt sich dann

$$f\left(\log U_\sigma\right) \equiv 0 \mod p^{n-r-k-c+2}\,.$$

Da $r\,, k\,, c$ unabhängig von n sind und n beliebig groß werden kann, muss $f(\log U_\sigma) = 0$ gelten und es folgt die Hinrichtung von (4.10).
Sei umgekehrt $f(\log U_\sigma) = 0$ für alle $\sigma \in G_K$ mit $v(U_\sigma - I_d) \geq 2$. Insbesondere gilt die Aussage also für alle $\sigma \in \check{G}$. Angenommen, es ist $f(A) \neq 0$. Dann gilt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ und der Stetigkeit von f, $v(f(A_n)) = v(f(A)) \neq \infty$ für hinreichend großes n. Sei also n von nun an entsprechend so groß. Fixiere außerdem $s \in \mathbb{N}_0$ (unabhängig von n), sodass $p^s \cdot f(A)^{-1}$ ganz ist. Multipliziere nun (4.17) mit $f(A_n)^{-1}$. Dann gilt für alle $\sigma \in \check{G}_n$

$$v\left((\sigma - id_L)\left(\frac{f(C_n)}{f(A_n)}\right) - \chi(\sigma)\right) \geq 2n - r - s\,.$$

Mit $x = \frac{f(C_n)}{f(A_n)}$ und $\lambda = \chi$ folgt dann wieder mit Lemma 4.13 die Existenz einer von n unabhängigen Konstante c mit

$$v\left(\chi(\sigma)\right) \geq 2n - r - s - c$$

für alle $\sigma \in \check{G}_n$. Komplett analog zur Hinrichtung sieht man dann auch hier, dass $\chi(\sigma) = 0$ für alle $\sigma \in G_K$ mit $v(U_\sigma - I_d) \geq 2$ gilt. Da aber $H' := \{\sigma \in G_K \mid v(U_\sigma - I_d) \geq 2\}$ eine offene Untergruppe von G_K ist, besitzt sie in G_K endlichen Index. Wegen $H' \leq Kern(\chi)$, wäre dann jedoch das Bild von G_K unter χ endlich. Das ist ein Widerspruch zur Definition von χ. Also gilt doch $f(A) = 0$. ∎

Korollar 4.15. *Mit den bisherigen Bezeichnungen ist $\phi = 0$ genau dann, wenn $\rho(G_K)$ endlich ist.*

Beweis. Mit Theorem 4.14 wissen wir, dass $\phi = 0$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{g} = 0$ gilt. Ist $\rho(G_K)$ endlich, so existiert ein m mit $U_\sigma = I_d$ für alle $\sigma \in G_K$ mit $v(U_\sigma - I_d) \geq m$ und daher

$$\mathfrak{g} = span_{\mathbb{Q}_p}\{\log U_\sigma \mid v\left(U_\sigma - I_d\right) \geq m\} = 0\,.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{g} = 0$, so ist wegen des lokalen Homeomorphismus zwischen einer Lie-Gruppe und ihrer Lie-Algebra $\{I_d\} \leq \rho\left(G_K\right)$ offen. Damit ist dann auch, da ρ stetig ist, $Kern\left(\rho\right) \leq G_K$ offen und somit $\left|\rho\left(G_K\right)\right| = \left|G_K/Kern\left(\rho\right)\right|$ endlich. ■

4.2 $\overline{K}$-zulässige p-adische Darstellungen

Es sei weiterhin $K \mid \mathbb{Q}_p$ endlich und K_0 die maximal unverzweigte Zwischenerweiterung. Dann gelten bekanntermaßen $K_0 = Quot\left(\mathcal{O}_{K_0}\right) = \mathcal{O}_{K_0}[\frac{1}{p}]$ sowie

$$rank_{\mathcal{O}_{K_0}}\left(\mathcal{O}_K\right) = [K : K_0] = e_K = v_K\left(p\right)\,.$$

Dabei sei v_K die zu v_p äquivalente normierte Bewertung auf K.

Sei W eine n-dimensionale semilineare $\overline{K}$-Darstellung von G_K. Dann ist $W^{G_K} = \{w \in W \mid \sigma\left(w\right) = w \;\forall \sigma \in G_K\}$ wegen $\overline{K}^{G_K} = K$ ein K-Unterraum von W und die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha_W \colon \overline{K} \otimes_K W^{G_K} &\longrightarrow W \\ \lambda \otimes w &\longmapsto \lambda \cdot w \end{aligned}$$

ein $\overline{K}$-Monomorphismus (vgl. dazu Theorem 2.13).

Proposition 4.16. *W ist genau dann eine triviale semilineare $\overline{K}$-Darstellung von G_K, wenn die Operation von G_K auf W diskret ist.*

Beweis. Dass G_K diskret auf W operiert, heißt, dass alle Punktstabilisatoren $Stab_{G_K}\left(w\right)$ für $w \in W$ offen sind. Äquivalent dazu ist, dass die Operation von G_K auf W selbst dann stetig ist, wenn man W mit der diskreten Topologie versieht.
Sei zunächst W trivial und $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine $\overline{K}$-Basis von W mit $B \subseteq W^{G_K}$ und $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i \in W$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \overline{K}$. Zeige, dass $Stab_{G_K}\left(w\right) \leq G_K$ offen ist. Für $\sigma \in G_K$ gilt aufgrund der Semilinearität und $B \subseteq W^{G_K}$

$$\sigma\left(w\right) = \sum_{i=1}^n \sigma\left(\lambda_i\right) \cdot e_i\,.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Menge B gilt $Stab_{G_K}\left(w\right) = \bigcap_{i=1}^n Stab_{G_K}\left(\lambda_i\right)$. Nun ist $\sigma \in Stab_{G_K}\left(\lambda_i\right) = Gal\left(\overline{K} \mid K\left(\lambda_i\right)\right)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da jedes λ_i aber algebraisch

über K ist, ist jede Erweiterung $K(\lambda_i) \mid K$ endlich und somit $Gal\left(\overline{K} \mid K(\lambda_i)\right)$ offen in G_K. Damit ist dann auch $Stab_{G_K}(w) = \bigcap_{i=1}^n Stab_{G_K}(\lambda_i)$ offen.
Sei umgekehrt die Operation von G_K auf W diskret. Dann können wir auf W die diskrete Topologie betrachten und sehen mit Proposition 2.12, dass W trivial ist. ■

Sei V eine n-dimensionale p-adische Darstellung von G_K und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine $\mathbb{Q}_p$-Basis von V. Sei außerdem $\rho\colon G_K \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$ der entsprechende stetige Gruppenhomomorphismus. Wir fassen die v_i's als Elemente von $W := \overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ auf und erhalten somit eine $\overline{K}$-Basis von W. Mit Definition 2.14 und Proposition 4.16 ist V genau dann $\overline{K}$-zulässig, wenn $Stab_{G_K}(v_i)$ offen in G_K ist für alle $i = 1, \ldots, n$. Das ist wiederum äquivalent dazu, dass der Kern von ρ offen ist in G_K. Es gilt nämlich

$$Kern(\rho) = \bigcap_{i=1}^{n} Stab_{G_K}(v_i) .$$

Wir erhalten also

Proposition 4.17. *Sei V eine p-adische Darstellung von G_K und $\rho\colon G_K \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$ der entsprechende stetige Gruppenhomomorphismus. Dann ist V genau dann $\overline{K}$-zulässig, wenn $\rho(G_K)$ endlich ist.*

4.3 $\mathbb{C}_K$-zulässige p-adische Darstellungen

Sei nun K^{ur} die maximal unverzweigte Zwischenerweiterung von $\overline{K} \mid K$ und $P := \widehat{K^{ur}}$ die Vervollständigung von K^{ur} sowie $\overline{P}$ der algebraische Abschluss von P in $\mathbb{C}_K$. Dann ist $\overline{P}$ invariant unter der Operation von G_K.
Des Weiteren ist $Gal\left(\overline{P} \mid P\right) = Gal\left(\overline{\widehat{K^{ur}}} \mid \widehat{K^{ur}}\right) \cong Gal\left(\overline{K^{ur}} \mid K^{ur}\right) = Gal\left(\overline{K} \mid K^{ur}\right) = I_K$, die Trägheitsuntergruppe von G_K. Definiert man $P_0 := \widehat{K_0^{ur}}$, so gilt $P = \widehat{K^{ur}} = \widehat{K_0^{ur} \cdot K} = \widehat{K_0^{ur}} \cdot K = P_0 \cdot K$ sowie $[P : P_0] = [K^{ur} : K_0^{ur}] = e_K < \infty$ (vgl. [5] Kapitel II, Paragraph 9, Satz 9.6).

Proposition 4.18. *(**1**) Eine semilineare $\overline{P}$-Darstellung W von G_K ist genau dann trivial, wenn die Operation von I_K auf W diskret ist.*
*(**2**) Eine p-adische Darstellung V von G_K ist genau dann $\overline{P}$-zulässig, wenn die Operation von I_K auf V diskret ist.*

Beweis. Per Definition folgt (**2**) aus (**1**). Wir beweisen also nur (**1**). Sei zunächst W eine d-dimensionale triviale $\overline{P}$-Darstellung von G_K. Dann ist $W \cong_{G_K} \overline{P}^d$ mit der natürlichen komponentenweisen Operation von G_K. Sei nun $w = (w_1, \ldots, w_d) \in \overline{P}^d$. Da $Stab_{I_K}(w_i) =$

$Gal\left(\overline{P} \mid P\left(w_i\right)\right)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ offen in I_K ist, ist auch $Stab_{I_K}\left(w\right) = \bigcap_{i=1}^{d} Stab_{I_K}\left(w_i\right)$ offen in I_K und damit die Operation von I_K auf W diskret.
Sei umgekehrt die Operation von I_K auf W diskret. Da $\overline{P}^{I_K} = P$, folgt mit 2.12 und 2.13, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha\colon \overline{P} \otimes_P W^{I_K} &\longrightarrow W \\ \lambda \otimes w &\longmapsto \lambda \cdot w \end{aligned}$$

ein mit den gegebenen I_K-Operationen verträglicher $\overline{P}$-Isomorphismus ist. Setze nun $V := W^{I_K}$. Dann ist V wegen $G_K/I_K \cong Gal\left(\overline{k} \mid k\right) = G_k$ eine P-Darstellung von G_k. Ist nun

$$\begin{aligned} \beta\colon P \otimes_K V^{G_k} &\longrightarrow V \\ \lambda \otimes v &\longmapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

ein (mit den gegebenen G_k-Operationen verträglicher) P-Isomorphismus, so ist wegen $V^{G_k} = \left(W^{I_K}\right)^{G_K/I_K} = W^{G_K}$ auch

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}\colon \overline{P} \otimes_K W^{G_K} &\longrightarrow W \\ \lambda \otimes w &\longmapsto \lambda \cdot w \end{aligned}$$

ein (G_K-verträglicher) $\overline{P}$-Isomorphismus und W damit nach 2.13 trivial.
Wie im Beweis von [2], Theorem 2.33, können wir V durch einen endlich erzeugten, freien, G_k-stabilen $\mathcal{O}_{P_0}$-Untermodul ersetzen, welcher V erzeugt und zeigen zunächst, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \beta'\colon \mathcal{O}_{P_0} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} V^{G_k} &\longrightarrow V \\ \lambda \otimes v &\longmapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

ein G_k-verträglicher $\mathcal{O}_{P_0}$-Isomorphismus ist. Wir nehmen zunächst an, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $p^n \cdot V = 0$. Führe dazu eine Induktion nach n durch.
Induktionsanfang $n = 1$: Da $K_0^{ur} \mid K_0 \mid \mathbb{Q}_p$ unverzweigt ist, ist p ein Erzeuger von $\mathfrak{m}_{K_0^{ur}}$ und $\mathfrak{m}_{\widehat{K_0^{ur}}} = \mathfrak{m}_{P_0}$. Damit ist V eine $\mathcal{O}_{P_0}/\mathfrak{m}_{P_0} = \overline{k}$-Darstellung von G_k. Da die Topologie auf $\overline{k}$ diskret ist, folgt mit 2.11 und Hilbert 90, dass V trivial als $\overline{k}$-Darstellung und somit β' ein $\mathcal{O}_{P_0}$-Isomorphismus ist.
Induktionsschritt: Sei die Aussage bereits für alle $l \leq n - 1$ bewiesen. Betrachte die

$\mathcal{O}_{P_0}$-lineare Abbildung von G_k-Darstellungen

$$\begin{aligned} f\colon V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto p \cdot v \,. \end{aligned}$$

Sei weiter $V' := Kern\,(f)$ sowie $V'' := V/V'$. Damit erhalten wir die folgende kurze exakte Sequenz G_k-invarianter $\mathcal{O}_{P_0}$-Moduln

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0\,.$$

Aus dieser erhalten wir mit 2.8 die lange exakte Sequenz

$$0 \to V'^{G_k} \to V^{G_k} \to V''^{G_k} \to H^1_{cont}\left(G_k, V'\right)\,.$$

Per Definition gelten $p \cdot V' = 0$ sowie $p^{n-1} \cdot V'' = 0$. Wie im Induktionsanfang gesehen, wird V' dadurch eine $\overline{k}$-Darstellung von G_k und ist somit trivial als solche. Also ist $V' \cong_{G_k} \overline{k}^d$ mit der komponentenweisen Operation durch G_k. Dann erfolgt erneut mit Hilbert 90

$$H^1_{cont}\left(G_k, V'\right) = H^1\left(G_k, V'\right) \cong H^1\left(G_k.\overline{k}\right)^d = 1\,.$$

Damit erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{P_0} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} (V')^{G_k} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{P_0} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} (V)^{G_k} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{P_0} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} (V'')^{G_k} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Der obere linke Pfeil hat seinen Ursprung darin, dass $\mathcal{O}_{P_0}$ ein freier $\mathcal{O}_{K_0}$-Modul und damit flach ist. Die vertikalen Pfeile links und rechts sind Isomorphismen nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist auch der mittlere vertikale Pfeil ein Isomorphismus. Existiert nun kein $n \in \mathbb{N}$ mit $p^n \cdot V = 0$, so folgt die Behauptung dennoch durch $\mathcal{O}_{P_0} = \varprojlim \mathcal{O}_{K_0^{ur}}/p^n \cdot \mathcal{O}_{K_0^{ur}}$ und $V = \varprojlim V/p^n \cdot V$ (vgl. dazu [2], Proposition 2.30).
Wir wissen also nun, dass es eine $\mathcal{O}_{K_0}$-Basis von V^{G_k} gibt, die auch $\mathcal{O}_{P_0}$-Basis von V ist. Damit gibt es natürlich auch eine K_0-Basis von V^{G_k}, welche gleichzeitig eine P_0-Basis von V ist. Da $P = P_0 \cdot K$ und $[P : P_0] = e_K$ gelten, kann jede d-dimensionale P-Darstellung V von G_k auch als P_0-Darstellung von G_k der Dimension $e_K \cdot d$ aufgefasst werden. Wir erhalten in unserem Fall somit wegen $[K : K_0] = e_K$

$$P \otimes_K V^{G_k} \cong_{G_k} P_0 \otimes_{K_0} V^{G_k} \xrightarrow{\sim} V\,,$$

d.h. die P-Darstellung $V = W^{I_K}$ von G_k ist trivial und damit, wie oben bemerkt, auch die $\overline{P}$-Darstellung W von G_K. ■

Proposition 4.19. *Sei V eine p-adische Darstellung von G_K und $\rho\colon G_K \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$ der entsprechende stetige Gruppenhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*
*(**1**) V ist $\mathbb{C}_K$-zulässig.*
*(**2**) Die Operation von I_K auf V ist diskret.*
*(**3**) $\rho(I_K)$ ist endlich.*

Beweis. (**2**) $\Leftrightarrow$ (**3**) ist klar.
(**1**) $\Rightarrow$ (**2**): Sei $dim_{\mathbb{Q}_p}(V) = d > 0$. Nach Voraussetzung existiert eine $\mathbb{C}_K$-Basis B von $W := \mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ mit $B \subseteq W^{G_K}$. Sei ϕ der Sen-Operator von W. Nach 4.11 ist dann $Kern(\phi) = span_{\mathbb{C}_K}\left(W^{G_K}\right) = W$. Damit ist also $\phi = 0$ und nach 4.15 dann $\rho(G_K)$ und somit auch $\rho(I_K)$ endlich.
(**2**) $\Rightarrow$ (**1**): Mit 4.18 ist V zunächst $\overline{P}$-zulässig. Da $\overline{P} \subseteq \mathbb{C}_K$ folgt nun die G_K-verträgliche Isomorphie

$$\mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \left(\mathbb{C}_K \otimes_{\overline{P}} \overline{P}\right) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \cong \mathbb{C}_K \otimes_{\overline{P}} \left(\overline{P} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\right) \cong \mathbb{C}_K \otimes_{\overline{P}} \overline{P}^d \cong \mathbb{C}_K^d \,.$$

Damit ist $\mathbb{C}_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ trivial als semilineare $\mathbb{C}_K$-Darstellung von G_K und V somit $\mathbb{C}_K$-zulässig. ■

Bemerkung 4.20 Mit der Notation aus 4.19 gilt:
$\rho(I_K)$ ist genau dann endlich, wenn es eine endliche Erweiterung L von K gibt mit $I_L \subseteq Kern(\rho)$.

Beweis. Sei $L \mid K$ endlich mit $I_L = I_K \cap Gal\left(\overline{K} \mid L\right) \subseteq Kern(\rho)$ (vgl. [5] Kapitel II, Paragraph 9, Satz 9.4). Da $Gal\left(\overline{K} \mid L\right)$ offen in G_K ist, ist I_L offen in I_K. Wegen

$$I_L = I_K \cap Gal\left(\overline{K} \mid L\right) \subseteq Kern(\rho) \cap I_K \subseteq I_K \,,$$

ist auch $Kern(\rho) \cap I_K$ offen in I_K und damit $\rho(I_K)$ endlich.
Ist umgekehrt $\rho(I_K)$ endlich. Dann ist $I_K \cap Kern(\rho) \subseteq I_K$ offen. Mit der Definition der Teilraumtopologie auf I_K und der Krull-Topologie auf G_K folgt die Existenz einer endlichen Erweiterung $L \mid K$, sodass $I_L = I_K \cap Gal\left(\overline{K} \mid L\right) \subseteq I_K \cap Kern(\rho)$. Insbesondere gilt $I_L \subseteq Kern(\rho)$. ■

Nenne eine p-adische Darstellung V von G_K gegeben durch $\rho\colon G_K \to Aut_{\mathbb{Q}_p}(V)$ *unverzweigt*, falls $I_K \subseteq Kern(\rho)$ gilt. Gilt diese Aussage statt für K, wie zu Beginn der

Bemerkung, für eine endliche Erweiterung L von K, so nenne ρ *potentiell unverzweigt*. Damit erhalten wir die folgende Umformulierung von 4.19:

$$(V, \rho) \text{ ist } \mathbb{C}_K\text{-zulässig} \Leftrightarrow \rho \text{ ist potentiell unverzweigt.}$$

Beispiel 4.21 Wir kehren noch einmal zurück zu der Notation aus Abschnitt 3.3 und betrachten den zyklotomischen Charakter $\rho\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^* \subseteq \mathbb{Q}_p^*$. Dieser ist wie folgt definiert. Sei $\sigma \in G_K$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_n \in \overline{K}$ eine primitive p^n-te Einheitswurzel. Dann ist $\sigma(\zeta_n)$ ebenfalls eine primitive p^n-te Einheitswurzel. Also existiert ein eindeutiges $\overline{a_n(\sigma)} \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^*$, sodass $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{a_n(\sigma)}$. Für $m < n$ sieht man leicht, dass $a_m(\sigma) \equiv a_n(\sigma) \mod p^m$ gilt. Wir definieren also

$$\rho(\sigma) := \left(\overline{a_n(\sigma)}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_p^*.$$

Dann ist ρ ein stetiger Gruppenhomomorphismus, welcher offensichtlich über den stetigen Einschränkungshomomorphismus $G_K \twoheadrightarrow Gal(K(\zeta_\infty) \mid K)$ faktorisiert. Dabei sei $K(\zeta_\infty) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(\zeta_n)$. Wir betrachten also

$$\rho\colon G_K \xrightarrow{res} Gal(K(\zeta_\infty) \mid K) \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^*. \tag{4.18}$$

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 bemerkt, ist die rechte Abbildung ein stetiger und offener Gruppenmonomorphismus. Nehme nun an, dass $\rho(I_K)$ endlich ist. Dann wäre $I_K \cap Kern(\rho)$ offen in $I_K = Gal\left(\overline{K} \mid K^{ur}\right)$ und es gäbe per Definition der Krull-Topologie auf I_K eine endliche Erweiterung L von K^{ur}, sodass $Gal\left(\overline{K} \mid L\right) \subseteq Kern(\rho)$. Nach (4.18) ist dann aber $Gal\left(\overline{K} \mid L\right) \subseteq Kern(res) = Gal\left(\overline{K} \mid K(\zeta_\infty)\right)$. Aus der Galoistheorie wissen wir aber, dass dann $K(\zeta_\infty) \subseteq L$ gilt. Das kann aber nicht sein, da einerseits K^{ur} als (maximal) unverzweigte Erweiterung des diskret bewerteten Körpers K ebenfalls diskret bewertet ist. Als endliche Erweiterung von K^{ur} gilt dies dann auch für L. Andererseits ist $K(\zeta_\infty)$ eine unendliche und total verzweigte Erweiterung von K und kann daher nicht mehr diskret bewertet sein. Also ist $\rho(I_K)$ nicht endlich und ρ damit nicht potentiell unverzweigt bzw. $(\mathbb{Q}_p, \rho)$ nicht $\mathbb{C}_K$-zulässig.

Literaturverzeichnis

[1] Bourbaki, N.: *Lie Groups and Lie Algebras, Part I, Chapters 1-3.* Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, Berlin Heidelberg, 1. Aufl., 1989, ISBN 978-3-540-64242-8.

[2] Fontaine, J. M. und Y. Ouyang: *Theory of p-adic Galois Representations*, Jan. 2018 (letzter Zugriff am 20. August 2020). `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/galoisrep.pdf`.

[3] Grinberg, D.: *The Lucas and Babbage congruences*, Jan. 2019 (letzter Zugriff am 20. August 2020). `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/lucascong.pdf`.

[4] Lang, S.: *Algebra.* Springer-Verlag New York, 3. Aufl., Jan. 2002, ISBN 978–0-387-95385-4.

[5] Neukirch, J.: *Algebraische Zahlentheorie.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. Aufl., Jan. 1992, ISBN 978-3-540-37547-0.

[6] Probst, C.: *Filtrations of p-adic analytic Galois groups of local fields*, 2008 (letzter Zugriff am 23. August 2020). `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~otmar/diplom/probst.pdf`.

[7] Sen, S.: *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules.* Annals of Mathematics, Second Series, 97, no. 1, S. 160–170, 1973.

[8] Sen, S.: *Continuous cohomology and p-adic Galois representations.* Invent Math 62, S. 89–116, 1980.

[9] Tate, J. T.: *p-Divisible Groups.* Proceedings of a Conference on Local Fields, S. 158–183, 1967.