**Bachelorarbeit**

# Die Hilbert-Samuel-Funktionen und der Krull'sche Höhensatz

**Aleksander Grochowicz**

Vorgelegt der
Fakultät der Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

Betreut von Prof. Dr. Jan Kohlhaase

# Inhaltsverzeichnis

**1 Grundlagen** **4**

**2 Graduierte Ringe und Moduln** **10**

**3 Die Hilbert-Funktion** **13**

**4 Die Samuel-Funktion** **18**

**5 Der Krull'sche Höhensatz** **22**

**6 Anwendungen und Beispiele** **27**
6.1 Folgerungen aus dem Krull'schen Höhensatz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
6.2 Beispiele zum Krull'schen Höhensatz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

# Einleitung

In dieser Bachelorarbeit arbeiten wir auf einen der zentralen Sätze der Dimensionstheorie von Ringen und Moduln hin, den Krull'schen Höhensatz. Unsere Darstellung orientiert sich im Wesentlichen an den entsprechenden Kapiteln des Buches [Mat06] von Hideyuki Matsumura.
Ursprünglich war die als "Krull'scher Hauptidealsatz" bekannte Aussage nur ein Spezialfall und wurde erst später in allgemeinerer Form bewiesen. Der Krull'sche Höhensatz besagt, dass die Höhe $ht(\mathfrak{p})$ eines minimalen Primteilers $\mathfrak{p}$ über einem beliebigen Ideal $I$ durch die Anzahl der Erzeuger von $I$ beschränkt ist. Auf dem Weg dorthin führen wir einige Konzepte und Definitionen ein, die wir hierfür benötigen: Zunächst betrachten wir graduierte und artinsche Ringe sowie Moduln und einige ihrer Eigenschaften, die wir im weiteren Verlauf verwenden werden. Dabei ist der Begriff "noethersch" sehr relevant, zumal die Idee eines artinschen Ringes eng daran angelehnt ist. Darauf aufbauend können wir mithilfe der Filtrierung den sogenannten assoziierten graduierten Ring definieren, wodurch wir uns auch erstmalig dem Gebiet der Topologie annähern. Über Längen von Moduln definieren wir anschließend Hilbert-Reihe und -Polynom sowie auch Hilbert- und Samuel-Funktionen in den Kapiteln 3 und 4. Wir werden die Verflechtungen dieser untersuchen und auf deren Grundlage zwei neue Dimensionsbegriffe für Moduln einführen, um schließlich in Kapitel 5 über einige topologische Sachverhalte in der algebraischen Geometrie zu sehen, dass diese unter bestimmten Eigenschaften mit der Krulldimension für Moduln übereinstimmen. Hierbei sei auf den Beginn der Vorlesung "Algebraische Geometrie I" von Prof. Kohlhaase verwiesen. Mit diesem Resultat werden wir das Hauptresultat, den Krull'schen Höhensatz, beweisen. Zuletzt werden wir uns in Kapitel 6 noch mit einigen Folgerungen und Beispielen, die wir dadurch erhalten, auseinandersetzen.

Zunächst erarbeiten wir einige Definitionen und nützliche Aussagen, die wir im weiteren Verlauf benötigen werden.

# Kapitel 1

# Grundlagen

Wie in der kommutativen Algebra üblich wollen wir im Folgenden von einem kommutativen Ring mit Eins $R$ ausgehen. Bei der Behandlung der folgenden Grundlagen orientieren wir uns an den Werken [Mat06], [AM69] und [Eis94]. Der Begriff eines noetherschen Ringes bzw. Moduls spielt in der kommutativen Algebra eine erhebliche Rolle. Es ist sinnvoll, eine eng verwandte Eigenschaft eines Ringes oder Moduls über die so genannte absteigende Kettenbedingung (decreasing chain condition, d.c.c.) einzuführen:

**Definition 1.1** (artinsch)
Seien $R$ ein Ring und ein $M$ ein $R$-Modul.

(i) Erfüllt ein $R$-Modul $M$ die folgende Eigenschaft (d.c.c.), so heißt er artinsch: Jede absteigende Kette von Untermoduln $M_1 \supseteq M_2 \supseteq ...$ von $M$ wird stationär, d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $M_{n_0} = M_{n_0+c}$ für alle $c \in \mathbb{N}$ (d.c.c.) gilt.

(ii) Ist $R$ als $R$-Modul artinsch, so nennt man den Ring $R$ artinsch.

*Bemerkung.* Analog wie bei der Definition von "noethersch" ist (i) äquivalent dazu, dass jede nichtleere Menge von Untermoduln des Moduls $M$ ein bzgl. der Inklusion $\subseteq$ *minimales* Element besitzt.

**Beispiel 1.2** (i) Jeder Körper $K$ ist artinsch und noethersch, da $K$ nur zwei Ideale, das Null- und das Einsideal, besitzt.

(ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ artinsch, da der Ring nur endlich viele Ideale besitzt. Auch in diesem Fall ist der Ring noethersch; in Proposition 1.15 werden wir sehen, dass dies immer der Fall ist.

(iii) $\mathbb{Z}$ ist ein noetherscher Ring, aber nicht artinsch. Betrachtet man nämlich die echt absteigende Kette von Idealen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $I_n = 2^n \cdot \mathbb{Z}$, so wird diese nie stationär.

Darüber hinaus werden wir den *Annihilator* eines Moduls $M$ benötigen.

**Definition 1.3** (Annihilator)
Seien $R$ ein Ring und $M$ ein $R$-Modul. Dann heißt $Ann_R(M) := \{r \in R \,|\, rM = 0\} \subseteq R$ der Annihilator (oder auch: Annulator) des Moduls M.

*Bemerkung.* Man erkennt die Ähnlichkeit zum Begriff des Torsionsuntermoduls (jedoch als Teilmenge des Moduls); beim Annihilator werden die Nullteiler jedoch nicht per se ausgeschlossen. Auf triviale Art und Weise gilt $0 \in Ann_R(M)$ und der Annihilator ist ein Ideal von $R$.

Später werden wir den Annihilator für die Krulldimension eines Moduls benötigen, wobei wir beachten, dass er eine Teilmenge des Ringes und nicht des Moduls ist. Die eben genannte *Krull-dimension eines Ringes* definiert man über die Höhen von Primidealen. Dabei ist das Primideal, dessen Höhe man betrachtet, das maximale Element in der Primidealkette. Dies kann man auch umkehren. Wir erinnern daran, dass die Inklusionen in Primidealketten per Definition echt sind.

**Definition 1.4** (Kohöhe)
$coht(\mathfrak{p}) := sup\{r \in \mathbb{N} \,|\, \mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_r$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ ist eine Primidealkette$\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt die Kohöhe des Primideals $\mathfrak{p}$.

**Proposition 1.5**
*Sei* $\mathfrak{p} \subseteq R$ *ein Primideal. Dann gilt:*

$$coht(\mathfrak{p}) + ht(\mathfrak{p}) \leq dim(R)$$

*Beweis.* Angenommen, $coht(\mathfrak{p}) + ht(\mathfrak{p}) > dim(R)$. Dann existieren Primidealketten $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_o \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{q}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_s = \mathfrak{p}$, sodass $coht(\mathfrak{p}) + ht(\mathfrak{p}) = r + s > dim(R)$. Dann ist aber $\mathfrak{q}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_s \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Primidealkette in $R$ der Länge $r + s$, wodurch wir einen Widerspruch erhalten. □

Es ist bekannt, dass ein noetherscher Ring nur endlich viele *minimale Primideale* besitzt (vgl. [Eis94], Thm. 3.1 mit M=R). Diese Minimalitätsaussage werden wir für den Beweis des Krull'schen Höhensatzes benötigen. Zur Vereinfachung späterer Notation definieren wir:

**Definition 1.6** (minimaler Primteiler)
Ein Primideal $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ heißt minimaler Primteiler vom Ideal $I \subseteq R$, falls $I \subseteq \mathfrak{p}$ und falls $\bar{\mathfrak{p}} := \mathfrak{p}/I$ ein minimales Primideal vom Restklassenring $R/I$ ist.

**Beispiel 1.7**
Wir betrachten $\mathbb{Z}$ und das Ideal $6\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$. Dann ist $2\mathbb{Z}$ ein minimaler Primteiler von $6\mathbb{Z}$, denn:

- $2\mathbb{Z}$ ist ein maximales Ideal von $\mathbb{Z}$, insbesondere ein Primideal, das $6\mathbb{Z}$ enthält
- Es ist $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, d.h. $\overline{2\mathbb{Z}}$ ist ein Primideal. Es gibt kein weiteres Primideal in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, das in $\overline{2\mathbb{Z}}$ enthalten ist.

Ähnlich wie in der Gruppentheorie existiert auch das Konzept der Einfachheit für Moduln:

**Definition 1.8** (einfach)
Ein $R$-Modul $M$ heißt *einfach*, falls $M \neq 0$ gilt und falls er nur die trivialen Untermoduln besitzt, nämlich den Nullmodul und sich selbst.

*Bemerkung.* Nun ist es offensichtlich, dass ein einfacher Modul artinsch und noethersch ist. Außerdem besitzt jeder lokale Ring $(R, \mathfrak{m})$ bis auf Isomorphie genau einen einfachen Modul und zwar den Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$:

*Beweis.* $R/\mathfrak{m}$ ist als Restklassenkörper trivialerweise einfach.
Angenommen, $M$ sei ein weiterer einfacher $R$-Modul. Dann ist $M = R \cdot m$ für alle $m \in M \setminus \{0\}$. Betrachte nun den Annihilator von $M$ in $R$, $Ann_R(M)$. Über die Abbildung $r + Ann_R(M) \mapsto r \cdot m$ für jedes $m \in M \setminus \{0\}$ gilt die Isomorphie $R/Ann_R(M) \cong M$, da die Abbildung wohldefiniert, linear und bijektiv ist. Damit ist auch $R/Ann_R(M)$ einfach. Wegen $0 \neq M \cong R/Ann_R(M)$ ist der Annihilator von $M$ in $R$ ein echtes Ideal in $R$. Damit gilt $Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{m}$. Liegt hier eine echte Inklusion vor, so wäre $\mathfrak{m}/Ann_R(M) \subsetneq R/Ann_R(M)$ ein echter, von Null verschiedener, Untermodul von $M$ (bis auf Isomorphie) und wir erhalten einen Widerspruch zur Einfachheit. Insbesondere ist $M$ isomorph zum Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$.

□

Einfache Moduln benötigt man für die so genannte *Kompositions-* oder *Zerlegungsreihe* eines Moduls:

**Definition 1.9**
Für einen $R$-Modul $M$ heißt eine Kette von Untermoduln $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq ... \supsetneq M_r = 0$ Kompositionsreihe von $M$, falls jedes $M_i/M_{i+1}$ einfach ist. Dann heißt $r$ die Länge der Kompositionsreihe.

**Satz 1.10** (Länge eines Moduls)
*Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M, M_1, ..., M_n$ $R$-Moduln.*

*(i) Existiert eine Kompositionsreihe wie in Definition 1.9, so ist deren Länge $r$ eindeutig und wird mit $l(M)$ als* Länge des Moduls *$M$ bezeichnet.*

*(ii) Ist $0 \to M_1 \to M_2 \to ... \to M_n \to 0$ eine exakte Sequenz von $R$-Moduln und hat jedes $M_i$ endliche Länge, so gilt $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i l(M_i) = 0$. Insbesondere gilt bei einer kanonischen kurzen exakten Sequenz mit $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ folgende Additivität:*

$$l(M/N) + l(N) = l(M).$$

*(iii) Ein Modul $M$ hat genau dann endliche Länge, wenn er sowohl artinsch als auch noethersch ist.*

*Beweis.* (i) vgl. [Eis94], Thm. 2.13.

(ii) Wir betrachten nun den Spezialfall einer kurzen exakten Sequenz. Den allgemeinen Fall beweist man, indem man die exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen aufspaltet (vgl. [Ash03], Thm. 5.2.3). Sei also oBdA $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ eine kurze exakte Sequenz und $N = N_0 \supsetneq ... \supsetneq N_s = 0$ bzw. $M/N = N'_0 \supsetneq ... \supsetneq N'_t = 0$ Kompositionsreihen von $N$ bzw. $M/N$. Bezeichnet $\pi : M \to M/N$ die Restklassenabbildung und $M_i := \pi^{-1}(N'_i)$, so ist $0 = N_s \subsetneq ... \subsetneq N = M'_t \subsetneq ... \subsetneq M'_0 = M$ eine Zerlegungsreihe von $M$, denn $M'_i/M'_{i+1} \cong N'_i/N'_{i+1}$ ist einfach. Nach (ii) gilt daher $l(M) = s + t = l(N) + l(M/N)$.

(iii) Angenommen, $M$ habe endliche Länge, d.h. es existiert eine Kompositionsreihe. Dann ist $M$ nach (i) artinsch und noethersch; jede auf- bzw. absteigende Kette ist höchstens so lang wie eine gegebene Kompositionsreihe. Umgekehrt sei $M$ artinsch und noethersch, dann ist bereits jede Folge von Untermoduln stationär, also existiert insbesondere eine endliche Kompositionsreihe.

□

*Bemerkung.*

- Die Länge ist nur im endlichen Fall wohldefiniert; ohne Existenz setzen wir $l(M) = \infty$. In Beispiel 1.2 (iii) haben wir einen noetherschen Modul unendlicher Länge gesehen.
- Jeder endlich erzeugte $R$-Modul $M$ ist Quotient eines endlich erzeugten freien Moduls $R^n$. Ist $R$ artinsch, so auch $R^n$ und $M$ nach Satz 1.10 (ii). Insbesondere hat $M$ endliche Länge.

**Beispiel 1.11**
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann hat $R/\mathfrak{m}^n$ stets endliche Länge. Es gilt sogar

$$l(R/\mathfrak{m}^n) = l(R/\mathfrak{m}) + l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + ... + l(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n).$$

Beachte, dass jedes $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ für $k \in \{0, ..., n-1\}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ ist, da $R$ noethersch und alle Ideale $\mathfrak{m}^k$ daher endlich erzeugt sind. Die $R$-Untermoduln von $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ entsprechen dessen Untervektorräumen und somit gilt $l(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}) = dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1})$.

**Definition 1.12**
Ein Ring $R$ heißt semilokal, falls er nur endlich viele maximale Ideale besitzt.

**Beispiel 1.13** (i) Jeder lokale Ring ist offensichtlich auch semilokal.

(ii) Sei $K$ ein Körper und $K[t]$ dessen Polynomring. $(t)$ und $(t-1)$ sind zwei maximale Ideale von $K[t]$, da $K[t]/(t) \cong K$ und $t-1$ irreduzibel in $K[t]$ ist, d.h. $K[t]/(t-1)$ ist ein Körper. Betrachten wir nun das Ideal $I := (t(t-1))$, so ist der Ring $K[t]/I$ semilokal mit zwei maximalen Idealen $(t)/I$ und $(t-1)/I$, denn

$$\begin{aligned} K[t]/I &\cong K[t]/(t) \times K[t]/(t-1) \text{ nach chinesischem Restsatz} \\ &\cong K \times K. \end{aligned}$$

**Lemma 1.14**
*Sei $R$ semilokal mit paarweise verschiedenen maximalen Primidealen $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_r$. Dann gilt*

$$Jac(R) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{m}_i.$$

*Beweis.* Sei $i \neq j$ für $i, j \in \underline{r}$. Dann gilt wegen der Maximalität $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = R$ und des Weiteren

$$\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}_j = (\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j)(\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}_j) \subseteq \mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_j \subseteq \mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}_j.$$

Induktiv folgt die Behauptung. $\square$

**Proposition 1.15**
*Jeder artinsche Ring $R$ ist noethersch.*

*Beweis.* Zur besseren Übersichtlichkeit unterteilen wir den Beweis in fünf Schritte.
1. Schritt: Jeder artinsche Integritätsbereich $R$ ist ein Körper.
Sei $r \in R \setminus \{0\}$. Wir betrachten die absteigende Kette von Idealen $(r) \supseteq (r^2) \supseteq ...$ von $R$. Diese muss stationär werden, d.h. $ar^{n+1} = arr^n = r^n$ für ein $a \in R$. Damit ist $r$ aber bereits eine Einheit und $R$ ist damit ein Körper.
2. Schritt: Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ vom artinschen Ring $R$ ist ein maximales Ideal, da $R/\mathfrak{p}$ mit dem 1. Schritt nicht nur ein Integritätsbereich, sondern sogar ein Körper ist (artinsch überträgt sich auf den Faktorring).
3. Schritt: $R$ besitzt nur endlich viele maximale Ideale. Wären $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, ...$ nämlich unendlich viele paarweise verschiedene maximale Ideale von $R$, so wäre $\mathfrak{m}_1 \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supsetneq ...$ eine unendlich lange echt absteigende Kette von Idealen; nach dem Chinesischen Restsatz gilt $R/\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \cong \prod_{i=1}^n R/\mathfrak{m}_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wäre die Kette stationär, so würde $\prod_{i=1}^n R/\mathfrak{m}_i = \prod_{i=1}^{n+1} R/\mathfrak{m}_i$ gelten, d.h. $R/\mathfrak{m}_{n+1} = 0$ - sie wird also nicht stationär. Solch eine unendliche absteigende Kette kann im artinschen Ring $R$ jedoch nicht existieren.
4. Schritt: Betrachte das Jacobson-Radikal $I := Jac(R) = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i$ von $R$. Dann ist $I \supseteq I^2 \supseteq ...$ eine absteigende Folge von Idealen, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $I^n = I^{n+1}$. Setze $J := \{x \in R \,|\, xI^n = 0\}$. Wir wollen $J = R$ zeigen. Angenommen, $J \neq R$, so wähle ein von $J$ verschiedenes minimales Ideal $J'$ mit $J \subsetneq J'$ (möglich, da $R$ artinsch). Für $x \in J' \setminus J$ beliebig gilt dann $J' = J + Rx$ aufgrund der Minmalität von $J'$. Nach dem Lemma von Nakayama gilt dann $J' \neq J + Ix$, aber mit Minimalität $J = J + Ix$ und somit $Ix \subseteq J$. Daraus folgt $xI^{n+1} = xII^n \subseteq JI^n = 0$ per Definition von $J$. Da wir $I^n = I^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ angenommen haben, gilt also auch $xI^n = 0$, sodass $x$ bereits in $J$ liegen muss und $J = R$ der ganze Ring ist.

5. Schritt: Nach dem 3. Schritt ist $R$ semilokal. Nach Lemma 1.14 entspricht das Jacobson-Radikal damit dem Produkt der endlich vielen maximalen Primideale, $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_r$, von $R$. Betrachte nun die absteigende Folge von Idealen $R \supsetneq \mathfrak{m}_1 \supsetneq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supsetneq ... \supsetneq Jac(R) = I \supsetneq I\mathfrak{m}_1 \supsetneq I\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supsetneq ... \supsetneq I^2 \supsetneq ... \supsetneq I^n = 0$. Für zwei beliebige aufeinanderfolgende Elemente der Folge $M$ und $M\mathfrak{m}_i$ gilt, dass $M/M\mathfrak{m}_i$ ein Vektorraum über dem Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}_i$ ist. Da $R$ artinsch ist, sind diese endlich-dimensional. Iterativ ist also auch die Länge des Moduls als Summe der Dimensionen nach Satz 1.10 (iii) endlich. □

*Bemerkung.* Für jeden artinschen Ring $R$ gilt $dim(R) = 0$, da jedes Primideal nach dem 2. Schritt des Beweises bereits maximal ist.

Eine weitere wichtige Konstruktion ist die des *Trägers* eines Moduls.

**Definition 1.16**
Sei $M$ ein $R$-Modul. Dann heißt $supp(M) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\} \subseteq Spec(R)$ Träger des Moduls $M$.

Der Träger eines Moduls ist eine Teilmenge des Primspektrums von $R$. Mithilfe von Lokalisierungen eines $R$-Moduls an den Primidealen des zugrundeliegenden Ringes - also einer so genannten lokalen Eigenschaft - lassen sich diesen Primidealen Eigenschaften zuordnen. In Anbetracht dessen ist diese Definition des Trägers durchaus vergleichbar mit der "Nichtnullstellenmenge" aus anderen Teilgebieten der Mathematik wie der Topologie. Auch wir wollen den Träger mit der Topologie in Verbindung bringen:

**Definition 1.17** (Zariski-Topologie)
Seien $R$ ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal von R. In der so genannten *Zariski-Topologie* betrachten wir für Ideale deren "Nullstellenmengen" $V(I) := \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \,|\, I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Deren Komplemente sind dabei die offenen Mengen der Topologie und die Mengen $V(I)$ sind abgeschlossen.

*Bemerkung.* Dass die Menge $\{V(I) \,|\, I \subseteq R \text{ Ideal}\}$ tatsächlich den Axiomen der abgeschlossenen Mengen einer Topologie genügt, zeigen wir hier nicht noch einmal.

Hier kommt das Konzept des Annihilators wieder ins Spiel, denn tatsächlich sind dessen Nullstellenmenge $V(Ann_R(M))$ und der Träger des Moduls $M$ eng miteinander verbunden:

**Satz 1.18**
*Seien $R$ ein Ring, $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul, $Ann_R(M)$ der Annhilator von $M$ in $R$ und $supp(M)$ der Träger von $M$. Dann gilt:*

*(i)* $V(Ann_R(M)) = supp(M)$

*(ii) Ist* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *eine exakte Sequenz von $R$-Moduln, so gilt*

$$supp(M) = supp(M') \cup supp(M'').$$

*Beweis.* (i) Wir zeigen direkt die Gleichheit der Mengen und verwenden hierfür die Definitionen und eine wichtige Eigenschaft von Lokalisierungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in supp(M) &\Leftrightarrow M_\mathfrak{p} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow Ann_R(M) \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset, \text{ denn } MS^{-1} = 0 \Leftrightarrow \exists s \in S : sM = 0 \\ &\Leftrightarrow Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Daraus folgt: $supp(M) = V(Ann_R(M))$.

(ii) Da der Lokalisierungs-Ringhomomorphismus $R \to R_{\mathfrak{p}}$ flach ist, erhalten wir aus der gegebenen exakten Sequenz für $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to M'_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_1} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_2} M''_{\mathfrak{p}} \to 0.$$

Es ist $M_{\mathfrak{p}} = 0 \Leftrightarrow M'_{\mathfrak{p}} = 0 = M''_{\mathfrak{p}}$, denn:

$$\begin{aligned} {}^{\prime\prime} \Rightarrow {}^{\prime\prime} : 0 &= im(0) = ker(f_1) = M'_{\mathfrak{p}} \\ 0 &= im(f_2) = ker(0) = M''_{\mathfrak{p}}. \\ {}^{\prime\prime} \Leftarrow {}^{\prime\prime} : 0 &= im(f_1) = ker(f_2) = M_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Damit ist $supp(M) = supp(M') \cup supp(M'')$.

□

# Kapitel 2

# Graduierte Ringe und Moduln

**Definition 2.1** ($G$-graduiert)
Sei $G$ ein Monoid.

(i) Ein ($G$-)graduierter Ring ist ein Ring $R$ mit einer Darstellung als direkte Summe abelscher Gruppen $R = \bigoplus_{i \in G} R_i$, sodass $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ gilt für alle $i, j \in G$.

(ii) Über einem graduierten Ring $R$ heißt $M$ ein graduierter $R$-Modul, wenn sich $M$ zerlegen lässt als direkte Summe von abelschen Gruppen $M = \bigoplus_{i \in G} M_i$, sodass $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$ gilt für alle $i, j \in G$.

(iii) Ein Element $x \in M$ eines graduierten $R$-Moduls heißt homogen, wenn $x \in M_i$ für ein $i \in G$ gilt. In diesem Fall heißt $i$ der Grad von $x$.

*Bemerkung.* Allgemeiner kann man $x \in M$ eindeutig schreiben als $x = \sum_{i \in G} x_i$ mit $x_i \in M_i$ und $x_i = 0$ für fast alle $i \in I$. Daher können wir $x_i$ als den homogenen Teil von $x$ vom Grad $i$ bezeichnen.

**Definition 2.2** (graduierter Untermodul)
Sei $M$ ein graduierter Modul über einem graduierten Ring $R$. Ein Untermodul $N \subseteq M$ heißt ein graduierter (auch: homogener) Untermodul von $M$, wenn er von homogenen Elementen erzeugt wird.

**Proposition 2.3**
*Seien $R$ ein $G$-graduierter Ring, $M$ ein graduierter $R$-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul von $M$. Dann sind äquivalent:*

*(i) $N$ ist ein graduierter Untermodul*

*(ii) Für alle $x \in N$ und für alle $i \in G$ ist auch der homogene Teil $x_i$ von $x$ ein Element von $N$.*

*(iii) $N = \sum_{i \in G}(N \cap M_i)$*

*Beweis.* *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Seien $(m_i)_{i \in I}$ homogene Erzeuger von $N$ mit $m_i \in M_{j(i)}$.
Aus $N = span_R((m_i)_{i \in I}) \ni x$ folgt $x = \sum_{i \in I} r^{(i)} m_i$ für gewisse $r^{(i)} \in R$ und daher $x_i = \sum_{j+j(i)=i} r_j^{(i)} m_i \in N$ für alle $i \in G$.
*(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*: Wir können $M = \bigoplus_{i \in G} M_i$ und $x = \sum_{i \in G} x_i$ mit $x_i \in N \cap M_i$ schreiben. Die andere Inklusion ist klar.

*(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*: $N = \sum_{i\in G}(N \cap M_i)$. Dann wird $N$ von den homogenen Elementen $\bigcup_{i\in G}(N \cap M_i)$ erzeugt, ist also ein graduierter Untermodul. $\square$

*Bemerkung.* In Proposition 2.3 (iii) ist die Summenzerlegung sogar direkt, da dies für $M = \bigoplus_{i\in G} M_i$ gilt.

**Lemma 2.4**
*Für einen graduierten Untermodul von $M = \bigoplus_{i\in G} M_i$ setze $N_i := M_i \cap N$. Dann wird $M/N = \bigoplus_{i\in G} M_i/N_i$ zu einem graduierten $R$-Modul.*

*Beweis.* Offensichtlich ist $M/N$ ein $R$-Modul. Für die Graduiertheit beachte

$$\begin{aligned} M/N &\cong (\bigoplus_{i\in G} M_i)/(\bigoplus_{i\in G} N_i) \text{ nach Proposition 2.3 (iii)} \\ &\cong \bigoplus_{i\in G} M_i/N_i. \end{aligned}$$

Dieser Isomorphismus ist gegeben durch $(x_i)_{i\in G}+N \mapsto (x_i+N_i)_{i\in G}$. Die Skalarmultiplikation auf $M/N$ mit einem Element $r_j \in R_j$ entspricht darunter der Abbildung $(x_i + N_i)_{i\in G} \mapsto (r_j x_i + N_{i+j})_{i\in G}$. Folglich macht die gegebene Zerlegung $M/N$ zu einem graduierten $R$-Modul.

$\square$

*Bemerkung.* Wir stellen fest, dass $R_0 \subseteq R$ ein Unterring von $R$ ist. Da jedes $M_i$ ein $R$-Modul ist, ist jeder solche Modul über die Inklusion $R_0 \hookrightarrow R$ auch ein $R_0$-Modul.
Meistens benutzt man den Begriff eines graduierten Rings, wenn man $G = \mathbb{N}$ betrachtet. In diesem Fall setzen wir $R^+ := \sum_{n\geq 1} R_n$. Dann ist $R^+$ ein Ideal von $R$ mit $R/R^+ \cong R_0$.

**Beispiel 2.5** (Graduierte Ringe)

(i) Jeder Ring ist auf triviale Weise graduiert: Man setze hierfür $R_0 = R$ und $R_n = 0$ für $n \geq 1$.

(ii) Der Polynomring $R = R_0[X_1, ..., X_n]$ wird zu einem $\mathbb{N}$-graduierten Ring, indem man den Grad des Monoms $X_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot X_n^{\alpha_n}$ als totalen Grad $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ definiert.

(iii) $R = R_0[X_1, ..., X_n]$ wird zum $\mathbb{N}^n$-graduierten Ring mit dem Grad $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ des obigen Monoms.

**Definition 2.6**
Eine Filtrierung eines Ringes $R$ ist eine absteigende Kette $R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq ...$ von Idealen, sodass $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ gilt; der assoziierte graduierte Ring wird als $gr(R) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} gr_n(R)$ mit $gr_n(R) = I_n/I_{n+1}$ für $n \geq 0$ definiert. Die Multiplikation wird definiert vermöge $(x+I_{n+1})\cdot(y+I_{m+1}) = xy + I_{n+m+1}$ für $x \in I_n$ und $y \in I_m$.

*Bemerkung.* Wie der Name bereits andeutet, wird $gr(R)$ zu einem graduierten Ring, denn:

(i) $gr_n(R)$ ist eine abelsche Gruppe

(ii) $gr_n(R)\cdot gr_m(R) \subseteq gr_{n+m}(R)$ via $(x+I_{n+1})\cdot(y+I_{m+1}) = \underbrace{xy}_{\in I_{n+m}} + I_{n+m+1} \in I_{n+m}/I_{n+m+1}$,

da per Definition $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ gilt.

Die Filtrierung $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$ definiert eine (lineare) Topologie auf $R$. Eine Menge $U \subseteq R$ heißt dabei offen, wenn es für alle $x \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x + I_n \subseteq U$.

Sei $R$ ein Ring, $I$ ein Ideal und $B = \bigoplus_{n\geq 0} \overbrace{I^n/I^{n+1}}^{=:B_n}$ der graduierte Ring, der mit der Filtrierung $I \supseteq I^2 \supseteq ...$ von $R$ assoziiert ist. Ein Element von $B_n$ kann als Linearkombination von Produkten von $n$ Elementen von $B_1 = I/I^2$ ausgedrückt werden:

*Beweis.* Es sind $B_1 = I/I^2 = \{i + I^2 | i \in I\}$ und $B_n = I^n/I^{n+1} = \{\sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^n i_{j,k} + I^{n+1} | i_{j,k} \in I,\, m \in \mathbb{N}\}$, wobei $\prod_{k=1}^n i_{j,k} + I^{n+1} = \prod_{k=1}^n (i_{j,k} + I^2)$ mit $i_{j,k} + I^2 \in B_1$. □

Darüber hinaus wird $B$ über $B_0 = R/I$ von Elementen von $B_1$ erzeugt. Ist $I = \sum_{i\in J} Rx_i$ und $\xi_i$ das Bild von $x_i$ in $B_1 = I/I^2$, so gilt $B \overset{Def.}{=} gr_I(R) = (R/I)[(\xi_i)_{i\in J}]$.

*Beweis.* Aus $I = \sum_{i\in J} Rx_i$ folgt $B_1 = I/I^2 = \sum_{i\in J}(R/I) \cdot \xi_i$. Wir haben gesehen, dass alle $r \in B_n$ eine endliche Summe von Produkten von $n$ Elementen in $I/I^2$ sind. $B$ wird also bereits über dem Unterring $B_0 = R/I$ von $(\xi_i)_{i\in J}$ erzeugt. Daraus folgt $B = (R/I)[(\xi_i)_{i\in J}]$ und dann ist B auch ein Quotient des Polynomrings $(R/I)[(t_i)_{i\in J}]$ über den surjektiven Einsetzungshomomorphismus $\varphi : (R/I)[(t_i)_{i\in J}] \to im(\varphi) = (R/I)[(\xi_i)_{i\in J}]$ mit $t_i \mapsto \xi_i, i \in J$. □

**Theorem 2.7**
*Ein $\mathbb{N}$-graduierter Ring $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ ist genau dann noethersch, wenn $R_0$ noethersch ist und $R$ ein endlich erzeugter Ring über $R_0$ ist.*

*Beweis.* " $\Leftarrow$ ": folgt aus dem Hilbert'schen Basissatz.
" $\Rightarrow$ ": Sei $R$ noethersch. Wegen $R_0 \cong R/R^+$ und der Tatsache, dass Quotientenmoduln eines noetherschen Moduls noethersch sind, ist auch $R_0$ noethersch.
Da $R$ noethersch und $R^+$ ein homogenes Ideal von $R$ ist, wird $R^+$ von endlich vielen homogenen Elementen $x_1, ..., x_r$ erzeugt.
Wir wollen nun $R = R_0[x_1, ..., x_r]$ zeigen. Tatsächlich reicht es, $R_n \subseteq R_0[x_1, ..., x_r]$ zu zeigen.
Sei dazu $d_i$ der Grad von $x_i$. Es gilt

$$R_n = x_1 R_{n-d_1} + ... + x_r R_{n-d_r} \text{ (NB: } R \text{ ist graduiert).} \tag{2.1}$$

Das liegt daran, dass wir $y \in R_n$ wie folgt schreiben können: $y = \sum_{i=1}^r x_i f_i$ mit $f_i \in R$. Sei $f_i = \sum_{j\geq 0} f_{ij}$ die homogene Zerlegung von $f$; dann gilt $y = y_n = \sum_{i=1}^r x_i f_{i(n-d_i)}$ und tatsächlich $\sum_{i=1}^r \sum_{j\neq n-d_i} x_i f_{ij} = 0$. Per Induktion nach $n \geq 1$ folgt $R_n \subseteq R_0[x_1, ..., x_r]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist auch

$$R_0 \subseteq R_0[x_1, ..., x_r] \text{ und } \bigoplus_{n\geq 0} R_n \subseteq R_0[x_1, ..., x_r].$$

Mit Graduiertheit erhalten wir folglich $R = R_0[x_1, ..., x_r]$ wie gefordert. □

# Kapitel 3

# Die Hilbert-Funktion

Die folgenden Kapitel 3 und 4 orientieren sich eng an [Mat06], §13. Sei nun $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ ein noetherscher graduierter Ring; ist dann $M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter $R$-Modul, so ist jedes $M_n$ als $R_0$-Modul endlich erzeugt. Ist $M = R$, so folgt dies direkt aus (2.1) aus dem obigen Beweis (endlich erzeugt). Im allgemeinen Fall wird $M$ von einer endlichen Anzahl homogener Elemente $\omega_i \in M$ erzeugt: $M = R\omega_1 + ... + R\omega_r$. Sei nun $e_i$ der Grad von $\omega_i$. Dann ist $M_n = R_{n-e_1}\omega_1 + ... + R_{n-e_r}\omega_r$ ($R_i = 0$ für $i \leq 0$) und die Behauptung folgt aus dem Fall $M = R$. Ist $R_0$ artinsch, so nach Proposition 1.15 auch noethersch und es gilt $l(M_n) < \infty$ nach Satz 1.10 (iii). Hierfür benötigen wir die Aussage aus der Bemerkung nach Satz 1.10, dass endlich erzeugte Moduln über artinschen Ringen artinsche Moduln sind.

**Definition 3.1**
In der obigen Situation definieren wir die Hilbert-Reihe $P(M,t) = \sum_{i=0}^{\infty} l(M_n)t^n \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$.

**Theorem 3.2**
*Sei $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ ein noetherscher graduierter Ring, $R_0$ artinsch und $M$ ein endlich erzeugter graduierter $R$-Modul. Ferner sei wie in Theorem 2.7 $R = R_0[x_1, ..., x_r]$ mit $x_i$ vom Grad $d_i$ und $P(M,t)$ wie oben. Dann ist die Hilbert-Reihe eine rationale Funktion in $t$ und kann geschrieben werden als*

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{\prod_{k=1}^{r}(1-t_i^{d_i})}, \tag{3.1}$$

*wobei $f \in \mathbb{Z}[t]$.*

*Beweis.* Wir wollen das Theorem per Induktion nach $r \geq 0$ beweisen.
<u>r=0:</u> $R = R_0$ artinsch und damit noethersch. Für $n$ groß genug ($M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$, aber endlich erzeugt!) ist $M_n = 0$. Daraus folgt, dass die Hilbert-Reihe sogar ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, da $l(0) = 0$. Mit dem leeren Produkt im Nenner folgt die Behauptung.
<u>$r-1 \mapsto r$:</u> $\mu_r : M \to M$, $m \mapsto x_r \cdot m$, ist $R$-linear. Die Linearität bezüglich $R_0$ gilt ebenso für die Einschränkungen $\mu_r^n : M_n \to M_{n+d_r}$ $m \mapsto x_r \cdot m$.
Schreibe $K_n := ker(\mu_r^n)$, $L_{n+d_r} := coker(\mu_r^n) = M_{n+d_r}/im(\mu_r^n)$, so erhalten wir die kanonische exakte Sequenz

$$0 \xrightarrow{0} K_n \xrightarrow{\subseteq} M_n \xrightarrow{\mu_r^n} M_{n+d_r} \xrightarrow{\pi^n} L_{n+d_r} \xrightarrow{0} 0, \tag{3.2}$$

wobei $\pi^n$ die Restklassenabbildung ist.
Setze nun $K := \bigoplus_{n\geq 0} K_n$ und $L := \bigoplus_{n\geq 0} L_{n+d_r}$. Dann ist $K = ker(\mu_r)$ ein $R$-Untermodul von $M$. Es ist

$$\bigoplus_{n\geq 0} im(\mu_r^n) \cong im(\mu_r) = x_r M \text{ und}$$
$$\bigoplus_{n\geq 0} L_{n+d_r} = \bigoplus_{n\geq 0}(M_{n+d_r}/im(\mu_r^n)) \cong \bigoplus_{n\geq 0} M_{n+d_r}/\bigoplus_{n\geq 0} im(\mu_r^n) \cong M/x_r M.$$

Da $M$ endlich erzeugt ist, sind auch $K$ und $L$ endlich erzeugt. Außerdem gelten:

- $x_r K = 0$ (offensichtlich $x_r ker(\mu_r) = 0$)
- $x_r L = 0$ ($l \in L : x_r \cdot l = x_r(m + im(\mu_r)) = x_r m + im(\mu_r) = 0$).

Daher fassen wir $K$ und $L$ als $R/x_r R$-Moduln auf. Wegen $R/xR \cong R_0[x_1, ..., x_{r-1}]$ können wir die Induktionsvoraussetzung auf $P(K,t)$ und $P(L,t)$ anwenden; dabei benutzen wir die Formel aus Satz 1.10 (ii):

$$\begin{aligned} l(K_n) - l(M_n) + l(M_{n+d_r}) - l(L_{n+d_r}) = 0 \ | \cdot t^{n+d_r} \\ \Rightarrow l(K_n)t^{n+d_r} - l(M_n)t^{n+d_r} + l(M_{n+d_r})t^{n+d_r} - l(L_{n+d_r})t^{n+d_r} = 0. \end{aligned}$$

Aufsummiert über $n$

$$\begin{aligned} & t^{d_r}\sum_n l(K_n)t^n - t^{d_r}\sum_n l(M_n)t^n + \sum_n l(M_{n+d_r})t^{n+d_r} - \sum_n l(L_{n+d_r})t^{n+d_r} = 0 \\ & \Rightarrow t^{d_r}P(K,t) - t^{d_r}P(M,t) + P(M,t) - P(L,t) = 0 \\ & \Rightarrow (1-t^{d_r})P(M,t) = P(L,t) - t^{d_r}P(K,t) \\ & \overset{IV}{\Rightarrow} (1-t^{d_r})P(M,t) = \frac{f_1(t)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1-t^{d_i})} - t^{d_r}\frac{f_2(t)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1-t^{d_i})} \\ & \Rightarrow P(M,t) = \frac{f_1(t) - t^{d_r}f_2(t)}{\prod_{i=1}^{r}(1-t^{d_i})} \end{aligned}$$

Der Zähler ist ein ganzzahliges Polynom; nennt man dieses $f(t)$, so folgt das Theorem. □

Viele Informationen über die Werte von $l(M_n)$ können wir aus dem obigen Theorem erhalten. Der Fall $d_1 = ... = d_r = 1$ ist dabei einfach; dann wird nämlich $R$ von Elementen vom Grad 1 über $R_0$ erzeugt und $P(M,t) = f(t) \cdot (1-t)^{-r}$.
Ist $f(t)$ durch $(1-t)$ teilbar, so können wir kürzen und $P$ in folgende Form bringen:
$P(M,t) = f(t)(1-t)^{-d}$ mit $f \in \mathbb{Z}[t]$, $d \geq 0$ und $f(1) \neq 0$ für $d > 0$.
Gilt dies, so schreibe $d = d(M)$. Wegen $(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + ...$ erhalten wir

$$(1-t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{d+n-1}{d-1}t^n : \tag{3.3}$$

*Beweis.* In $\mathbb{Z}[t]$ gilt $(1-t)(1+t+t^2+...) = 1$; dies beweist in der Induktion nach $d \geq 1$ auch den Induktionsanfang.

$$\underline{d \mapsto d+1}: (1-t)^{-(d+1)} = (1-t)^{-d}(1-t)^{-1} \overset{IV}{=} \Big(\sum_{n\geq 0}\binom{d+n-1}{d-1}t^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} t^n\Big)$$
$$= \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{n}\binom{d+i-1}{d-1}\Big)t^n$$
$$= \sum_{n\geq 0}\binom{d+n}{d}t^n.$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich aus der folgenden zweiten Induktion:

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{k+j-1}{k-1} = \binom{k+n}{k}$$

$\underline{n=0}$ : *klar.*

$$\underline{n \mapsto n+1:} \sum_{j=0}^{n+1}\binom{k+j-1}{k-1} = \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k-1} = \binom{k+n+1}{k}$$

□

Ist $f(t) = \sum_{i=0}^{s} a_i t^i$, so gilt:

$$l(M_n) = a_0\binom{d+n-1}{d-1} + a_1\binom{d+n-2}{d-1} + ... + a_s\binom{d+n-s-1}{d-1}, \text{ denn:} \tag{3.4}$$

Wir wissen $P(M,t) = \sum l(M_n)t^n$ und $P(M,t) = f(t)(1-t)^{-d}$ mit $f \in \mathbb{Z}[t], d \geq 0$ und $f(1) \neq 0$ für $d > 0$.
Es ist $(1-t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{d+n-1}{d-1}t^n$ wie wir oben gesehen haben und deshalb

$$\sum_{n\geq 0} l(M_n)t^n = f(t)(1-t)^{-d} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{d+n-1}{d-1}t^n\Big)\Big(\sum_{i=0}^{s} a_i t^i\Big)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n}\binom{d+i-1}{d-1}a_{n-i}\Big)t^n$$

Mit Koeffizientenvergleich erhält man

$$l(M_n) = \sum_{i=0}^{n}\binom{d+i-1}{d-1}a_{n-i} \overset{j:=n-i}{=} \sum_{j=0}^{n}\binom{d+(n-j)-1}{d-1}a_j.$$

Wir beachten, dass die Binomialkoeffizienten oder die $a_i$ für $i > s$ wegfallen, d.h. wir erhalten (3.4).

Schreibe die rechte Seite von (3.4) im Fall $n \geq s+1-d$ um als Polynom in $n$:

$$\begin{aligned}
&a_0\binom{d+n-1}{d-1} + a_1\binom{d+n-2}{d-1} + ... + a_s\binom{d+n-s-1}{d-1} \\
&= a_0\frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!} + a_1\frac{(d+n-2)!}{(d-1)!(n-1)!} + ... + a_s\frac{(d+n-s-1)!}{(d-1)!(n-s)!} \\
&= \frac{(n+1)\cdot ... \cdot (d+n-1)}{(d-1)!}\cdot a_0 + ... + \frac{(n-s+1)\cdot ... \cdot (d+n-s-1)}{(d-1)!}\cdot a_s \\
&= \frac{1}{(d-1)!}[a_0(n^{d-1}+...) + ... + a_s(n^{d-1}+...)], \text{ da } n \geq s+1-d \\
&= \frac{(a_0+a_1+a_2+...+a_s)}{(d-1)!}n^{d-1} + ... \\
&= \frac{f(1)}{(d-1)!}n^{d-1} + ... \overset{(\star)}{=:} \varphi(n) \\
\Rightarrow \varphi(t) &= \frac{f(1)}{(d-1)!}t^{d-1} + \text{Terme niederen Grades}
\end{aligned}$$

Wegen $\binom{m}{d-1} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot ... \cdot(m-d+2)}{(d-1)!}$ für $m \geq 0$ folgt:

**Korollar 3.3**
*Ist $d_1 = ... = d_r = 1$ und $d = d(M)$ wie oben, so existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $\varphi_M(t)$ vom Grad $d-1$ mit rationalen Koeffizienten, sodass $l(M_n) = \varphi_M(n)$ für $n \geq s+1-d$ gilt. Dabei ist $s$ der Grad des Polynoms $(1-t)^d P(M,t)$.*

*Beweis.* $d_1 = ... = d_r = 1$ und $d := d(M)$ (wobei $d$ angibt, wie viele der Erzeuger vom Grad 1 sind).

$$\begin{aligned}
P(M,t) &= \frac{f(t)}{(1-t)^d} = f(t)(1-t)^{-d} \\
\Leftrightarrow f(t) &= P(M,t)(1-t)^d
\end{aligned}$$

Sei nun $s$ der Grad von $f$ und $\varphi(n)$ wie oben. Es ist

$$\begin{aligned}
l(M_n) &= a_0\binom{d+n-1}{d-1} + a_1\binom{d+n-2}{d-1} + ... + a_s\binom{d+n-s-1}{d-1} \\
&\overset{(3.4),(\star)}{=} \varphi(n) =: \varphi_M(n) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Dieses Polynom hat, wie wir gesehen haben, rationale Koeffizienten, ist vom Grad $d-1$ und erfüllt die erforderte Gleichung. Die Eindeutigkeit folgt aus der Vorgabe unendlich vieler Werte über dem Körper $\mathbb{Q}$. □

**Definition 3.4**
Das Polynom $\varphi_M$ heißt das Hilbert-Polynom des graduierten Moduls $M$. Die numerische Funktion $l(M_n)$ heißt Hilbert-Funktion von $M$; mit dem Grad der Hilbert-Funktion bezeichnen wir den Grad des zugehörigen Hilbert-Polynoms.

*Bemerkung.* Für allgemeine $d_1, ..., d_r$ ist es nicht notwendigerweise der Fall, dass $l(M_n)$ durch ein Polynom dargestellt werden kann.

**Beispiel 3.5** (i) $R = R_0[t_0, ..., t_r]$ der gewöhnliche Polynomring über $R_0$, die Anzahl der Monome vom Grad $n$ ist $\binom{n+r}{r}$. Außerdem ist $l(R_n) = l(R_0) \cdot \binom{n+r}{r}$ und daher $P(R,t) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+r}{r} t^n = (1-t)^{-(r+1)}$. Das ergibt $f(t) = 1$, $s = 0$ und $d = d(R) = r+1$. Aus Korollar 3.3 folgt $\varphi_R(t) = \frac{l(R_0)}{r!}(t+r)\cdot ...\cdot (t+1)$, denn dies ist ein Polynom vom Grad $r = d-1$ mit rationalen Koeffizienten und $\varphi_R(n) = l(R_0)\binom{n+r}{r} = l(R_n)$ für alle $n \geq 0 \geq s+1-d = -r$.

(ii) $K$ Körper, $F(t_0, ..., t_r)$ ein homogenes Polynom vom Grad $s$; setze des Weiteren $R = K[t_0, ..., t_r]/(F(t_0, ..., t_r))$. Zunächst ist $l(R_n) = \binom{n+r}{r} - \binom{n-s+r}{r}$ nach Satz 1.10 (ii) für alle $n \geq 0$, wenn $\binom{n-s+r}{r} = 0$ gesetzt wird, sofern $n < s$. Daraus ergibt sich $P(R,t) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+r}{r} t^n - \sum_{n\geq 0} \binom{n-s+r}{r} t^n = (1-t)^{-(r+1)} - t^s(1-t)^{-(r+1)} = \frac{1-t^s}{(1-t)^{r+1}} = \frac{1+t+...+t^{s-1}}{(1-t)^r}$ und $f(t) = 1+t+...+t^{s-1}$, sofern $s \neq 0$ in $K$ vorausgesetzt wird. Es folgt $d(R) = r \geq t$ und nach Korollar 3.3 gilt $\varphi_R(t) = \binom{t+r}{r} - \binom{t-s+r}{r} = \frac{s}{(r-1)!}t^{r-1} + ...$, denn dies ist ein Polynom vom Grad $r-1 = d(R)-1$ mit rationalen Koeffizienten und $\varphi_R(n) = l(R_n)$ für alle $n \geq s \geq s-r$.

(iii) $K$ Körper, $R = K[t_1, ..., t_r]/\mathfrak{p} = K[\xi_1, ..., \xi_r]$ mit einem homogenen Primideal $\mathfrak{p}$ und $\xi_i = x_i + \mathfrak{p}$. Sei $t$ der Transzendenzgrad von $Quot(R)$ über $K$ und nehme an, dass $\xi_1, ..., \xi_t$ algebraisch unabhängig über $K$ sind. Dann gibt es $\binom{n+t-1}{t-1}$ Monome vom Grad n in $\xi_1, ..., \xi_t$ und diese sind linear unabhängig über $K$, sodass $l(R_n) \geq \binom{n+t-1}{t-1}$. Setzen wir $S := K[t_1, ..., t_t]$, so gilt also $\varphi_R(n) \geq \varphi_S(n)$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Nach einem Argument, auf das wir in Theorem 4.2 eingehen werden, folgt daraus $d(R) = deg(\varphi_R) + 1 \geq deg(\varphi_S) + 1 \overset{(i)}{=} t$. Wir werden im Beweis von Theorem 6.3 zu diesem Beispiel zurückkehren. In der Tat lässt sich sogar zeigen, dass $d = t$; dies werden wir nicht genauer betrachten.

In Beispiel (ii) ist der Zähler im Höchstkoeffizienten von $\varphi_R$ gleich dem Grad des Polynoms $F$; dies gilt auch in allgemeinen Fällen (vgl. [Mat06], S. 96).

# Kapitel 4

# Die Samuel-Funktion

Wir begeben uns nun auf die Spuren von Krulls "Dimensionstheorie in Stellenringen" [Kru38] (wobei hier mit Stellenringen lokale Ringe gemeint sind); dort hat er mithilfe der Konstruktion von $gr_{\mathfrak{m}}(R)$, einen allgemeinen lokalen noetherschen Ring mit der Idealtheorie in einem Polynomring über einem Körper verbunden. Wird nämlich $\mathfrak{m}$ von $r$ Elementen erzeugt, so ist $gr_{\mathfrak{m}}(R)$ von der Form $K[t_1, ..., t_r]/I$, wobei $K = R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper und $I$ ein homogenes Ideal ist.
Die Hilbert-Funktion dieses graduierten Ringes wurde erstmals von P. Samuel (1951) verwendet, als er die Multiplizität des Ringes $R$ untersucht hat. Diese ist eng mit der Samuel-Funktion verbunden, die wir im Folgenden untersuchen werden. Auf die Multiplizität gehen wir dabei nicht ein, es sei aber auf §15 in [Mat06] verwiesen.

Allgemeiner setzen wir im gesamten Kapitel voraus, dass $R$ ein semilokaler noetherscher Ring ist.

**Definition 4.1**
Sei $R$ ein semilokaler noetherscher Ring und $\mathfrak{m} := Jac(R)$ das Jacobson-Radikal von $R$. Ist $I$ ein Ideal von $R$, sodass für ein $\nu > 0$ gilt, dass $\mathfrak{m}^\nu \subset I \subset \mathfrak{m}$ gilt, so bezeichnen wir $I$ als ein definierendes Ideal.

In diesem Fall stimmen die so genannte $I$-adische und $\mathfrak{m}$-adische Topologie überein. Oder anders gesagt: Ein definierendes Ideal definiert also die $\mathfrak{m}$-adische Topologie:

*Beweis.* Sei $U$ $I$-adisch offen und $u \in U$. Dann ist $u + I^n M \subseteq U$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $u + \mathfrak{m}^{\nu n} M \subseteq u + I^n M \subseteq U$. Damit ist $U$ auch $\mathfrak{m}$-adisch offen.
Sei umgekehrt $U$ $\mathfrak{m}$-adisch offen und $u \in U$. Dann gilt $u + \mathfrak{m}^n M \subseteq U$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und damit $u + I^n M \subseteq u + \mathfrak{m}^n M \subseteq U$. Damit ist auch $U$ $I$-adisch offen. □

Wir nehmen weiterhin an, dass $R$ ein semilokaler noetherscher Ring ist und fixieren ein definierendes Ideal $I$.

Sei nun $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Setzen wir $gr_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \overbrace{I^n M / I^{n+1} M}^{=: M'_n}$, so ist $gr_I(M)$ in natürlicher Art und Weise ein graduierter Modul über $gr_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$, indem man die Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise bzw. wie vorher (vgl. Definition 2.6) definiert. Graduiertheit zeigt man über die Relation $R_k M_j \subseteq M_{k+j}$:

*Beweis.* Sei also $x_k \in I_k, i_j \in I, m_j \in M$. Setze $x = x_k + I^{k+1} \in R_k$ und $m = i_j m_j \in M_j$. Dann ist

$$x \cdot m = (x_k + I^{k+1}) \cdot (i_j m_j + I^{j+1}M) \overset{Def.}{=} x_k i_j m_j + I^{k+j+1}M \in I^{k+j}M/I^{k+j+1}M,$$

denn $x_k i_j \in I^{k+j}$ wegen Graduiertheit, d.h. $x_k i_j m_j \in I^{k+j}M$. □

Setzen wir nun $R'{:=}gr_I(R)$ und $M' := gr_I(M)$. Dann ist $R'_0 = R/I$ als Quotient des artinschen Ringes $R/\mathfrak{m}^\nu$ ebenfalls artinsch. Dass $R/\mathfrak{m}^\nu$ artinsch ist, sieht man wie im 5. Schritt des Beweises von Proposition 1.15: $R/\mathfrak{m}^\nu$ ist nämlich noch immer semilokal und das Jacobson-Radikal ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\nu$ und daher nilpotent. Dass in der dortigen Notation $M/M\mathfrak{m}_i$ endlich-dimensional ist, liegt daran, dass wir $R$ schon als noethersch vorausgesetzt haben.

Sei nun $I = \sum_{i=1}^r x_i R$ ($R$ ist noethersch) und $\xi_i = x_i + I^2 \in I/I^2$. Aus dem Beweis vor Theorem 2.7 folgt dann, dass $R' = R'_0[\xi_1, ..., \xi_r]$ bzw. $gr_I(R) = (R/I)[\xi_1, ..., \xi_r]$ gilt.
Ist außerdem $M = \sum_{i=1}^s R\omega_i$ (da $M$ endlich erzeugt) und $\bar{\omega_i}$ das Bild von $\omega_i$ unter der kanonischen Abbildung in $M'_0 := M/IM$, so ist $gr_I(M) = M' = \sum_{i=1}^s R'\bar{\omega_i}$.

*Beweis.* Sei $i \in I^n$ und $m \in M$, sodass $im + I^{n+1}M \in M'_n$. Schreiben wir $m = \sum_{j=1}^s r_j\omega_j$, so gilt

$$\begin{aligned} im + I^{n+1}M &= \sum_{j=1}^s i r_j \omega_j + I^{n+1}M \\ &= \sum_{j=1}^s (ir_j + I^{n+1})\bar{\omega_j} \in \sum_{j=1}^s R'\bar{\omega_j}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Dabei beachten wir, dass $l(M'_n) = l(I^nM/I^{n+1}M)$; hierbei steht auf der linken Seite die Länge von $M'_n$ als $R'_0$-Modul und rechts als $R$-Modul. Diese Werte sind endlich, denn $M'_n$ und $I^nM/I^{n+1}M$ sind endlich erzeugte Moduln über dem artinschen Ring $R_0$.

Per Induktion zeigt man dann:

$$\sum_{i=0}^n l(M'_i) = l(M/I^{n+1}M)$$

$\underline{n=0}$: $l(M'_0) = l(I^0M/IM) = l(M/IM)$

$\underline{n \mapsto n+1}$: Angenommen, es gelte $\sum_{i=0}^n l(M'_i) = l(M/I^{n+1}M)$.

$$\sum_{i=0}^{n+1} l(M'_i) \overset{IV}{=} l(M/I^{n+1}M) + l(M'_{n+1}) = l(M/I^{n+1}M) + l(I^{n+1}M/I^{n+2}M).$$

Betrachte nun die exakte Sequenz

$$0 \to I^{n+1}M/I^{n+2}M \overset{\subseteq}{\to} M/I^{n+2}M \overset{f}{\to} M/I^{n+1}M \to 0,$$

wobei $f(m + I^{n+2}) := m + I^{n+1}M$ die Restklassenabbildung ist. Aus der Exaktheit der Sequenz folgt $l(M/I^{n+1}M) + l(I^{n+1}M/I^{n+2}M) = l(M/I^{n+2}M)$ nach Satz 1.10 (ii), sodass unsere Induktion abgeschlossen ist.

Setze nun $\chi_M^I(n) = l(M/I^{n+1}M)$ und $\chi_M^{\mathfrak{m}}(n) =: \chi_M(n)$ nennen wir die Samuel-Funktion des $R$-Moduls $M$.
Wie oben gesehen ist $M' = gr_I(M)$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über $R' = gr_I(R)$, wobei $R_0' = R/I$ artinsch ist. Wir können auf diese Situation also die Ergebnisse über Hilbert-Funktionen aus Kapitel 3 anwenden. Mithilfe von $\sum_{i=0}^n \binom{d+i-1}{d-1} = \binom{d+n}{d}$ und der Formel (3.5) erhalten wir:

$$\chi_M^I(n) = l(M/I^{n+1}M) = a_0\binom{d+n}{d} + a_1\binom{d+n-1}{d} + ... + a_s\binom{d+n-s}{d} \tag{4.1}$$

Da die Koeffizienten $a_i$ ganzzahlig sind mit $a_0 + ... + a_s = f(1) \neq 0$, erhalten wir für $n \geq s$ ein Polynom in $n$ vom Grad $d$ mit rationalen Koeffizienten.
Der Grad $d$ des Polynoms hängt nur von $M$ ab und ist unabhängig von $I$: In der Tat, seien $I, J$ definierende Ideale. Dann existieren per Definition $m, p \in \mathbb{N}$, sodass $\mathfrak{m}^m \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^p \subseteq J \subseteq \mathfrak{m}$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{m}^{mp} \subseteq I, J \subseteq \mathfrak{m}$ gilt. Dann gelten auch die Inklusionen $I^p \subseteq J$ und $J^m \subseteq I$. Wegen $I^p \subseteq J$ und $J^m \subseteq I$ gilt

$$\begin{aligned} l(M/I^{pn+p}M) &= l(M/(I^p)^{n+1}M) \geq l(M/J^{n+1}M) \\ \text{und } l(M/J^{mn+m}M) &= l(M/(J^m)^{n+1}M) \geq l(M/I^{n+1}M). \end{aligned}$$

Es folgen die Ungleichungen: $\chi_M^I(pn+p-1) \geq \chi_M^J(n)$ und $\chi_M^J(mn+m-1) \geq \chi_M^I(n)$.

Im Beweis des nun folgenden Theorems werden wir sehen, dass dadurch bereits die Polynome $\chi_M^I$ und $\chi_M^J$ vom selben Grad sein müssen. Der Grad $d = d(M)$ hängt daher nur vom Modul $M$ selbst ab.

**Theorem 4.2**
*Seien R ein noetherscher semilokaler Ring,* $0 \to M' \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M'' \to 0$ *eine exakte Sequenz endlich erzeugter R-Moduln. Dann ist d(M) = max* $\{d(M'), d(M'')\}$. *Ist I ein beliebiges definierendes Ideal von R, so haben* $\chi_M^I$ - $\chi_{M''}^I$ *und* $\chi_{M'}^I$ *denselben Höchstkoeffizienten.*

Im Beweis des Theorems werden wir ohne Beweis das Lemma von Artin-Rees benutzen (vgl. [Mat06], Thm. 8.5, insb. Beweis auf S. 59),

**Lemma 4.3** (Artin-Rees)
*Seien R noethersch,* $I \subseteq R$ *ein Ideal, M ein endlich erzeugter R-Modul und* $M' \subseteq M$ *ein Untermodul von M. Dann existiert* $c \in \mathbb{N}$, *sodass für alle* $n > c$ *gilt:*

$$(I^nM) \cap M' = I^{n-c}(I^cM \cap M') \tag{4.2}$$

*Beweis vom Theorem 4.2.* Wir können $M'' = M/M'$ annehmen. Es gilt

$$M''/I^nM'' \stackrel{Def.}{=} (M/M')/I^n(M/M') \cong M/(M' + I^nM).$$

Hierfür definiert man die zueinander inversen Abbildungen

$$\begin{aligned} &\rho : (M/M')/I^n(M/M') \to M/(M' + I^nM), (m + M') + I^n(M/M') \mapsto m + (M' + I^nM) \\ &\psi : M/(M' + I^nM) \to (M/M')/I^n(M/M'), m + (M' + I^nM) \mapsto (m + M') + I^n(M/M'). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} l(M/I^nM) &= l(M/(M' + I^nM)) + l((M' + I^nM)/I^nM) \text{ nach Satz 1.10 (ii)} \\ &= l(M/(M' + I^nM)) + l(M'/(M' \cap I^nM)) \text{ nach Isomorphiesätzen} \\ &= l(M''/I^nM'') + l(M'/(M' \cap I^nM)). \end{aligned}$$

Setze nun $\varphi(n) = l(M'/(M' \cap I^{n+1}M))$, sodass folgt:

$$\chi_M(n) = \chi_{M''}(n) + \varphi(n). \tag{4.3}$$

Wir setzen $\varphi := \chi_M - \chi_{M''} \in \mathbb{Q}[t]$. Wegen $\chi_{M''}(n), \varphi(n) \geq 0$ für alle $n$ zeigt das weiter unten stehende Argument, dass die Höchstkoeffizienten von $\chi_{M''}$ und $\varphi$ nicht negativ sind. Darus folgt $d(M) = deg(\chi_M) = deg(\chi_{M''} + \varphi) = max\,\{deg(\chi_{M''}), deg(\varphi)\} = max\,\{d(M''), deg(\varphi)\}$.
Nach dem Lemma von Artin-Rees existiert ein $c > 0$, sodass für alle $n > c$ gilt:

$$I^{n+1}M' \subseteq I^{n+1}M \cap M' = I^{n-c+1}(I^cM \cap M') \subseteq I^{n-c+1}M'$$
$$\text{und damit per Definition } \chi^I_{M'}(n) \geq \varphi(n) \geq \chi^I_{M'}(n-c)$$

Nun wollen wir die Gleichheit der Grade und der Höchstkoeffizienten der Polynome zeigen.
Sei $k := max\,\{d = d(M'), deg(\varphi)\}$. Schreibe $\chi_{M'}(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$ und $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{deg(\varphi)} b_i t^i$.
Dann ist $\frac{\chi_{M'}(n)}{n^k} \geq \frac{\varphi(n)}{n^k} \geq \frac{\chi_{M'}(n-c)}{n^k}$.
Für alle Summanden $a_i n^i$ bzw. $b_i n^i$ von $\chi_{M'}$ bzw. $\varphi$ gilt, dass $\frac{a_i n^i}{n^k} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ und $\frac{b_i n^i}{n^k} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, falls $i < k$.
Angenommen, $k = deg(\varphi) > d$. Dann gilt $\frac{\chi_{M'}(n)}{n^k} \to 0$ und $\frac{\varphi(n)}{n^k} \to b_k$. Dann erhalten wir aber aus $\chi_{M'}(n) \geq \varphi(n)$ einen Widerspruch. Analog führt die Annahme $k = d > deg(\varphi)$ zu einem Widerspruch, wobei $\varphi(n) \geq \chi^I_{M'}(n-c)$ für alle $n \geq 0$ verwendet wird. Es folgt $d = deg(\varphi)$.
Andererseits stimmen auch die Höchstkoeffizienten mit demselben Argument überein (für $a_k \neq b_k$ erhalten wir wieder einen Widerspruch).
Insgesamt gilt also mit (4.3) $d(M) = max\,\{d(M'), d(M'')\}$ und dass $\chi_M - \chi_{M''}$ und $\chi_{M'}$ denselben Höchstkoeffizient besitzen. □

Wir definieren nun ein weiteres Maß für die „Größe“ des Moduls $M$: Die so genannte Chevalley-Dimension drückt aus, wie weit ein Modul davon entfernt ist, endliche Länge zu haben.

**Definition 4.4** (Chevalley-Dimension)
Sei $R$ ein semilokaler noetherscher Ring und $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Setze $\delta(M)$ als kleinste natürliche Zahl $n$, sodass $x_1, ..., x_n \in \mathfrak{m} = Jac(R)$ existieren, für die $l(M/x_1M + ...x_nM) < \infty$. Ist bereits die Länge des Moduls $l(M) < \infty$, so setze $\delta(M) = 0$.

*Bemerkung.* Ist $I$ ein beliebiges definierendes Ideal von $R$, so gilt $l(M/IM) < \infty$ (wie wir auch im obigen Beweis gesehen haben) und folglich

$$\delta(M) \leq \text{minimale Erzeugerzahl jedes definierenden Ideals von } R.$$

Für $M = R$ hat man sogar Gleichheit:

**Lemma 4.5**
*Sei $R$ ein semilokaler noetherscher Ring mit Jacobson-Radikal $\mathfrak{m}$. Dann gilt $\delta(R) = min\,\{r \in \mathbb{N} \,|\, \exists x_1, ..., x_r \in \mathfrak{m} : (x_1, ..., x_r)$ ist ein definierendes Ideal von $R\}$.*

*Beweis.* Ist $(x_1, ..., x_r)$ ein definierendes Ideal, so hat wie gesehen $R/(x_1, ..., x_r)$ endliche Länge. Es folgt $\delta(R) \leq r$, sodass $\delta(R)$ kleiner gleich dem obigen Minimum ist. Für die umgekehrte Ungleichung seien $x_1, ..., x_{\delta(R)} \in \mathfrak{m}$, sodass $R/(x_1, ..., x_{\delta(R)})$ endliche Länge hat. Setze $I := (x_1, ..., x_{\delta(R)})$. Dann ist $R/I$ ein semilokaler artinscher Ring (vgl. Satz 1.10 (iii)) mit Jacobson-Radikal $\mathfrak{m}/I =: \bar{\mathfrak{m}}$. Da die Folge $\bar{\mathfrak{m}} \supseteq \bar{\mathfrak{m}}^2 \supseteq ...$ stationär wird, folgt aus dem Lemma von Nakayama $\bar{\mathfrak{m}}^\nu = 0$ für ein $\nu > 0$, d.h. $\mathfrak{m}^\nu \subseteq I$. Daher ist $I$ ein definierendes Ideal und $\delta(R)$ größer gleich dem obigen Minimum. □

# Kapitel 5

# Der Krull'sche Höhensatz

Nun werden wir den Hauptsatz der Dimensionstheorie beweisen, aus dem der Krull'sche Höhensatz, auf den wir in dieser Bachelorarbeit hinarbeiten, folgen wird.

Bevor wir jedoch dazu kommen, werden wir nun einige Begriffe der Topologie, die wir im ersten Kapitel diskutiert haben, benutzen und zwei weitere einführen.

**Definition 5.1**
Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum.

(i) $(X, \tau)$ heißt irreduzibel, wenn $X$ nicht leer ist und nicht die Vereinigung echter, abgeschlossener Mengen ist, d.h. gilt $X = Y_1 \cup Y_2$ mit abgeschlossenen Mengen $Y_1$ und $Y_2$, so gilt bereits $X = Y_1$ oder $X = Y_2$.

(ii) $dim(X) := sup\{n \in \mathbb{N} \mid$ es existiert eine Kette abgeschlossener, irreduzibler Teilmengen $Y_0 \subsetneq ... \subsetneq Y_n$ in $X$ der Länge $n\}$ heißt die (Krull-)Dimension des topologischen Raumes $X$.

*Bemerkung.* Die Teilmengen $Y_i$ von $X$ in (ii) werden mit der von $X$ induzierten Topologie versehen und werden dadurch zu topologischen Räumen, wodurch wir sie erst dann gemäß (i) als irreduzibel bezeichnen können.

**Lemma 5.2**
*Sei $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul und $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln.*
*Dann ist $dim(M) = max\{dim(M'), dim(M'')\}$, wobei $dim(M) := dim(R/Ann_R(M))$ die Krulldimension des Ringes $R/Ann_R(M)$ ist.*

*Beweis.* Wir unterteilen den Beweis des Lemmas in fünf Schritte zur besseren Übersichtlichkeit.
<u>1. Schritt:</u> Zeige zunächst $Spec(R/Ann_R(M)) = supp(M)$.
Wir fassen $Spec(R/Ann_R(M))$ als Teilmenge von $Spec(R)$ auf, denn die Restklassenabbildung $\pi : R \to R/Ann_R(M)$ induziert eine injektive Abbildung $Spec(R/Ann_R(M)) \to Spec(R)$, deren Bild $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p}\}$ ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} Spec(R/Ann_R(M)) &= \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | Ann_R(M) \cap (R \backslash \mathfrak{p}) = \emptyset\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}, \text{ denn } MS^{-1} = 0 \Leftrightarrow \exists s \in S : sM = 0 \\ &= supp(M). \end{aligned}$$

2. Schritt: Wir benutzen die Eigenschaften der Zariski-Topologie und beobachten dabei, dass $supp(M) = V(Ann_R(M))$ nach Satz 1.18 (i) ist. Damit ist auch $V(Ann_R(M)) = supp(M)$ abgeschlossen.
3. Schritt: Aus dem Hilbert'schen Nullstellensatz folgt, dass $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den Primidealen von $R$ und den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von $Spec(R)$ ist. Daraus folgt:

$$dim(R/Ann_R(M)) = dim(Spec(R/Ann_R(M))) \overset{1.Schritt}{=} dim(supp(M)).$$

Man beachte bei der ersten Gleichheit, dass links eine Krulldimension eines Ringes und rechts eines topologischen Raumes steht.
4. Schritt: Nach Satz 1.18 (ii) gilt $supp(M) = supp(M') \cup supp(M'')$. Mit dem 2. Schritt ist also $supp(M) = supp(M') \cup supp(M'')$ die Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen in $Spec(R)$. Ist nun $Y_0 \subsetneq ... \subsetneq Y_n$ eine Kette irreduzibler, abgeschlossener Teilmengen von $supp(M)$, so erhält man die Zerlegung

$$Y_n = (Y_n \cap supp(M')) \cup (Y_n \cap supp(M''))$$

in abgeschlossene Teilmengen. Nun ist aber $Y_n$ per Definition irreduzibel.
Daraus folgt, dass

$$Y_n \subseteq supp(M') \text{ oder } Y_n \subseteq supp(M''),$$

d.h. $Y_n$ liegt bereits in einem der beiden Träger. Dann liegt aber auch die gesamte Kette in $supp(M')$ oder $supp(M'')$.
Umgekehrt kann solch eine Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von $supp(M')$ bzw. $supp(M'')$ auch als solche in $supp(M)$ aufgefasst werden, denn die Teilmengen sind auch in $supp(M)$ abgeschlossen ($supp(M'), supp(M'') \subseteq Spec(R)$). Zusammen erhalten wir

$$dim(supp(M)) = max\{dim(supp(M')), dim(supp(M''))\}. \tag{5.1}$$

5. Schritt: Zuletzt können wir nun die Aussage des Lemmas beweisen und beachten, dass wir hier verschiedene Dimensionsbegriffe benutzen.

$$\begin{aligned} dim(M) &\overset{Def.}{=} dim(R/Ann_R(M)) \overset{3.Schritt}{=} dim(supp(M)) \\ &\overset{4.Schritt}{=} max\{dim(supp(M')), dim(supp(M''))\} \\ &\overset{3.Schritt}{=} max\{dim(R/Ann_R(M')), dim(R/Ann_R(M''))\} \\ &\overset{Def.}{=} max\{dim(M'), dim(M')\} \end{aligned}$$

□

**Theorem 5.3** (Hauptsatz der Dimensionstheorie)
*Seien $R$ ein semilokaler, noetherscher Ring und $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Dann gilt*

$$dim(M) = d(M) = \delta(M). \tag{5.2}$$

*Beweis.* 1. Schritt: Zeige $d(M) \geq dim(M)$.
Zunächst wissen wir, dass $d(M)$ und $\delta(M)$ endlich sind, denn:

- $d(M) < \infty$, da $d(M)$ nach Korollar 3.3 der Grad eines Polynoms ist.

- $\delta(M) < \infty$ nach der Bemerkung im Anschluss an Definition 4.4.

Per Induktion nach $d(R)$ zeigen wir zunächst, dass $d(R) \geq dim(R)$ gilt. Setze $\mathfrak{m} = Jac(R)$ für das Jacobson-Radikal von $R$.
$\underline{d(R) = 0}$: $l(R/\mathfrak{m}^n)$ konstant für $n >> 0$, für diese $n$ ist $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ und damit gilt nach Lemma von Nakayama $\mathfrak{m}^n = 0$. Daher ist jedes Primideal von $R$ maximal, sodass jede Primidealkette Länge 0 hat. Daher ist $dim(R) = 0$.
Sei nun $\underline{d(R) > 0}$. Wir nehmen zusätzlich $dim(R) > 0$ an, sonst sind wir fertig.
Es existiert daher eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_l$. Sei $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$ und $B := R/(\mathfrak{p}_0 + xR)$. Wende Theorem 4.2 auf die folgende exakte Sequenz an:

$$\begin{aligned} 0 \to & R/\mathfrak{p}_0 \to R/\mathfrak{p}_0 \to R/(\mathfrak{p}_0 + xR) \to 0, \\ & r + \mathfrak{p}_0 \mapsto \underbrace{xr}_{\notin \mathfrak{p}_0} + \mathfrak{p}_0 \end{aligned}$$

wobei die linke Abbildung injektiv ist wegen $x \notin \mathfrak{p}_0$ und da $\mathfrak{p}_0$ prim ist. Nach Theorem 4.2 gilt $d(B) \leq d(R/\mathfrak{p}_0)$. Darüber hinaus haben aber $\chi_{R/\mathfrak{p}_0} - \chi_B$ und $\chi_{R/\mathfrak{p}_0}$ denselben Höchstkoeffizienten. Das ist nur möglich, falls $d(B) = deg(\chi_B) < deg(\chi_{R/\mathfrak{p}_0}) = d(R/\mathfrak{p}_0) \overset{4.2}{\leq} d(R)$. Für die letzte Ungleichung wende wieder 4.2 auf die exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{p}_0 \to R \to R/\mathfrak{p}_0 \to 0$ an. Induktiv gilt dann

$$dim(B) \leq d(B) \leq d(R) - 1.$$

In $B$ erhalten wir mit dem Bild von $\mathfrak{p}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_l$ eine Primidealkette der Länge $l - 1$ und damit die Ungleichung $l - 1 \leq dim(B) \leq d(R) - 1$. Daraus folgt $l \leq d(R)$. Da dies für alle Primidealketten gilt, folgt $dim(R) \leq d(R)$ und die Induktion ist abgeschlossen.
Betrachten wir nun einen beliebigen endlich erzeugten $R$-Modul $M$. In Thm. 6.4 in [Mat06] sehen wir, dass eine aufsteigende Folge von Untermoduln von $M$

$$0 \subseteq M_0 \subseteq ... \subseteq M_q = M \text{ existiert mit } M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i \text{ für } \mathfrak{p}_i \in Spec(R). \tag{5.3}$$

Aus dem vorherigen Lemma wissen wir, dass für eine exakte Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ gilt, dass

$$dim(M) = max\{dim(M'), dim(M'')\}.$$

Zusammen mit Theorem 4.2 erhalten wir aus dem oben Gezeigten:

$$d(M) = max\{d(R/\mathfrak{p}_i)\} \geq max\{dim(R/\mathfrak{p}_i)\} = dim(M).$$

<u>2. Schritt:</u> Zeige $\delta(M) \geq d(M)$.
Für $\underline{\delta(M) = 0}$ gilt $l(M) < \infty$, sodass $\chi_M(n)$ beschränkt ist. Daraus folgt, dass $d(M) = 0$ ist.
Angenommen, $\underline{\delta(M) = s > 0}$. Wähle $x_1, ..., x_s \in \mathfrak{m}$, sodass $l(M/x_1M + ... + x_sM) < \infty$ und setze $M_i := M/x_1M + ... + x_iM$. Dann ist offenbar $\delta(M_i) = \delta(M) - i$ für $1 \leq i \leq s$. Andererseits ist wie im Beweis von Theorem 4.2

$$\begin{aligned} l(M_1/\mathfrak{m}^n M_1) &= l(M/(x_1M + \mathfrak{m}^n M)) \\ &= l(M/\mathfrak{m}^n M) - l(x_1M/(x_1M \cap \mathfrak{m}^n M)) \\ &= l(M/\mathfrak{m}^n) - l(M/ \underbrace{(\mathfrak{m}^n M : x_1)}_{=\{x \in M | x_1 x \subseteq \mathfrak{m}^n M\}}) \\ &\geq l(M/\mathfrak{m}^n M) - l(M/\mathfrak{m}^{n-1} M) \end{aligned}$$

Da $\chi_M(t)-\chi_M(t-1)$ ein Polynom vom Grad $d(M)-1$ ist, folgt daraus nach demselben Limesargument wie im Beweis von 4.2, dass $d(M_1) = deg(\chi_{M_1}) \geq deg(\chi_M(t) - \chi_M(t-1)) = d(M) - 1$. Iterativ erhalten wir $d(M_s) \geq d(M) - s$. Wegen $\delta(M_s) = 0$ folgt dann auch $d(M_s) = 0$ und damit $s \geq d(M)$.
3. Schritt: Zeige $dim(M) \geq \delta(M)$ per Induktion nach $dim(M)$.
Angenommen, $dim(M) = 0$: Dann ist auch $dim(R/Ann_R(M)) = dim(supp(M)) = 0$. Folglich ist jedes Primideal in $supp(M)$ maximal. Mit der Aussage (5.3) existieren Primideale $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$, sodass $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ für eine aufsteigende Folge von Untermoduln $0 \subseteq M_0 \subseteq ... \subseteq M_q = M$. Ohne genauer auf die Eigenschaften von assoziierten Primidealen einzugehen, sieht man in Thm. 6.5 in [Mat06], dass diese Primideale $\mathfrak{p}_i$ assoziierte Primideale sind, die insbesondere in $supp(M)$ liegen. Mit der Additivität der Länge von Moduln gilt also:

$$\begin{aligned} l(M) &= \sum_{i=1}^{q} l(M_i/M_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{q} l(R/\mathfrak{p}_i) \text{ (man beachte, dass die } R/\mathfrak{p}_i \text{ Körper und als Moduln einfach sind)} \\ &= \sum_{i=1}^{q} 1 = q < \infty \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dann auch $\delta(M) < \infty$.
Sei nun $dim(M) > 0$. Da der Ring $R$ noethersch ist, ist auch $R/Ann_R(M)$ noethersch. Daher existieren nur endlich viele minimale Primideale über $Ann_R(M)$, d.h. Primideale von $R$, die minimal sind unter allen Primidealen, welche $Ann_R(M)$ enthalten. Es seien $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_t$ diejenigen unter ihnen mit $dim(M) = coht(\mathfrak{p}_i)$. Hierbei verwenden wir $dim(M) = dim(R/Ann_R(M)) = sup\{coht(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in Min(R/Ann_R(M))\}$. Es gilt daher per Definition $coht(\mathfrak{p}_i) = dim(M) > 0$ für $1 \leq i \leq t$. Daher kann $\mathfrak{p}_i$ nicht maximal sein, enthält also nicht das Jacobson-Radikal $\mathfrak{m}$: $R/\mathfrak{m}$ ist ein semilokaler noetherscher Ring mit $Jac(R/\mathfrak{m}) = 0$. Wie im Beweis von 1.15 (5. Schritt) ist $R/\mathfrak{m}$ von endlicher Länge, also artinsch. Aus dem dortigen 2. Schritt folgt, dass jedes Primideal von $R/\mathfrak{m}$ maximal ist, und damit $V(\mathfrak{m}) = Max(R)$. Nach Prop. 1.11 (i) in [AM69] können wir ein $x_1 \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i$ wählen und setzen $M_1 := M/x_1M$. Wegen $x_1M_1 = 0$ folgt $supp(M_1) \subseteq supp(M) \setminus \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_t\}$ und daher $dim(M_1) \leq sup\{coht(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in supp(M) \setminus \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_t\}\} < dim(M)$. Folglich können wir auf $M_1$ die Induktionsvoraussetzung anwenden, sodass $\delta(M_1) \leq dim(M_1)$ gilt. Es gilt aber offenkundig $\delta(M) \leq \delta(M_1) + 1$, also auch $\delta(M) \leq dim(M_1) + 1 \leq dim(M)$. □

Nun kommen wir zu unserem Hauptziel, dem Beweis des Krull'schen Höhensatzes.

**Theorem 5.4** (Krull'scher Höhensatz)
*Seien $R$ ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, etwa $I = (a_1, ..., a_r)$ und $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ ein minimaler Primteiler von $I$ (vgl. Definition 1.6). Dann gilt $ht(\mathfrak{p}) \leq r$.*

*Beweis.* Es ist $Spec(R_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in Spec(R) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$.
Wir betrachten die Komposition der Homomorphismen $R \to R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$, die die injektive Abbildung $Spec(R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}) \to Spec(R)$ induziert. Das Bild dieser Abbildung ist $\{\mathfrak{q} \in Spec(R) \mid I \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$. $\bar{\mathfrak{p}} \in Min(R/I)$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist minimal unter Primidealen, die $I$ enthalten. Deswegen besteht $Spec(R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p})$ aus nur einem Element, nämlich $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$.
Aus dem allgemeinen Hilbert'schen Nullstellensatz folgt, dass $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$ das Nilradikal von $R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$ ist. Außerdem ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ($R$ noethersch und Lokalisierungen sowie Quotienten

von noetherschen Ringen sind noethersch). Daher

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} : 0 = (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}/IR_{\mathfrak{p}})^n \cong (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n/(IR_{\mathfrak{p}})^n$$

Wegen $(IR_{\mathfrak{p}})^n \subseteq IR_{\mathfrak{p}}$ gilt

$$(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n \subseteq IR_{\mathfrak{p}}.$$

Folglich ist $R_{\mathfrak{p}}/IR_{\mathfrak{p}}$ ein Quotient von $R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^n$ und hat damit endliche Länge. Wir erhalten: $ht(\mathfrak{p}) = dim(R_{\mathfrak{p}}) \overset{5.3}{=} \delta(R_{\mathfrak{p}}) \leq r.$ $\square$

Der Krull'sche Höhensatz wird in der Literatur teilweise auch verallgemeinerter Hauptidealsatz von Krull genannt. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass Wolfgang Krull diese Eigenschaft zunächst im Fall $r = 1$ bewiesen hatte und folglich Hauptideale behandelt hat. Erst später wurde der Satz in größerer Allgemeinheit gezeigt. Dennoch verblieb der Name Krull mit diesem Satz verbunden, auch wenn streng genommen diese Version auch weiteren Mathematikern zu verdanken ist.

# Kapitel 6

# Anwendungen und Beispiele

## 6.1 Folgerungen aus dem Krull'schen Höhensatz

**Theorem 6.1**
*Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal eines noetherschen Ringes $R$ mit $ht(\mathfrak{p}) = r$. Dann gilt:*

*(i) $\mathfrak{p}$ ist minimaler Primteiler für ein Ideal $I = (a_1, ..., a_r)$.*

*(ii) Sind $b_1, ..., b_s \in \mathfrak{p}$, so gilt $ht(\mathfrak{p}/(b_1, .., b_s)) \geq r - s$.*

*(iii) Sind $a_1, ..., a_r$ wie in (i), so gilt $ht(\mathfrak{p}/(a_1, ..., a_i)) = r - i$ für alle $i \in \underline{r}$.*

*Beweis.* vgl. [Mat06], Thm. 13.6. □

**Theorem 6.2**
*Sei $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ noethersch graduiert.*

*(i) Ist $I \subseteq R$ homogen, $\mathfrak{p}$ ein Primteiler von $I$, so ist $\mathfrak{p}$ ebenfalls homogen.*

*(ii) Ist $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal von $R$ mit $ht(\mathfrak{p}) = r$, so existiert eine Kette von homogenen Primidealen $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ der Länge $r$.*

*Beweis.* (i) Wir können $\mathfrak{p}$ schreiben als $Ann_R(\{x\}) := \{r \in R \,|\, rx = 0\}$ für ein geeignetes $x \in R/I$. Das ist einfach die Definition eines Primteilers (vgl. [Mat06], S. 38). Sei $a \in \mathfrak{p}$ beliebig und seien $x = x_0 + ... + x_r$ und $a = a_0 + a_1 + ... + a_q$ die Zerlegungen in homogene Terme. Wegen $ax = 0$ gelten

$$a_0x_0 = 0 \qquad a_0x_1 + a_1x_0 = 0$$
$$a_0x_2 + a_1x_1 + a_2x_0 = 0 \text{ etc.}$$

Daraus folgt dann

$$a_0^2x_1 = 0 \qquad a_0^3x_2 = 0$$
$$... \qquad a_0^{r+1}x_r = 0$$

Wir erhalten somit $a_0^{r+1} \in \mathfrak{p}$ und wegen der Primidealeigenschaft auch direkt $a_0 \in \mathfrak{p}$. Daher gilt auch $a_1 + ... + a_q \in \mathfrak{p}$ und wie oben ergibt dies $a_1 \in \mathfrak{p}$. Iterativ erhalten wir, dass alle homogenen Terme von $a$ in $\mathfrak{p}$ liegen, sodass $\mathfrak{p}$ ein homogenes Ideal ist.

(ii) Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette der Länge $r$. Dann ist $\mathfrak{p}_0$ ein minimaler Primteiler von $(0)$ und damit nach (i) ein homogenes Ideal. Daher können wir $R$ durch $R/\mathfrak{p}_r$ ersetzen und annehmen, dass $R$ oBdA ein Integritätsbereich ist.
Wählen wir nun ein von Null verschiedenes homogenes Element $b_1 \in \mathfrak{p}$; nach Theorem 6.1 (ii) gilt $ht(\mathfrak{p}/b_1R) \geq r-1$. Andererseits gilt natürlich $ht(\mathfrak{p}/b_1R) \leq ht(\mathfrak{p}) = r$. Gleichheit kann aber nicht gelten. Durch Liften einer Primidealkette $\bar{\mathfrak{q}_0} \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}/b_1R = \bar{\mathfrak{q}}_r$ unter der Restklassenabbildung $R \to R/b_1R$ würde man die Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p} = \mathfrak{q}_r$ erhalten. Wegen $0 \subsetneq b_1R \subseteq \mathfrak{q}_0$ und da $0 \in Spec(R)$ würde dies zum Widerspruch $ht(\mathfrak{p}) \geq r+1$ führen. Es folgt: $r-1 \leq ht(\mathfrak{p}/b_1R) < r$, also $ht(\mathfrak{p}/b_1R) = r$. Daher existiert ein minimaler Primteiler $\mathfrak{q}$ von $b_1R$, sodass $ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{q}) = r-1$ gilt. Da $\mathfrak{q} \neq (0)$, hat das homogene Primideal $\mathfrak{q}$ Höhe 1. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung nach $r$ auf $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ an, so existiert eine Primidealkette $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_{r-1} = \mathfrak{p}$ (sogar von homogenen Primidealen). Fügen wir dass Nullideal hinzu (immer noch ein Primideal), so erhalten wir wie gewünscht eine Primidealkette der Länge $r$.

$\square$

**Theorem 6.3**
*Sei $K$ ein Körper, $R = K[\xi_1, ..., \xi_r]$ graduiert und von Elementen vom Grad 1 erzeugt. Setze $M := \sum_{i=1}^r \xi_i R$, $A = R_M$ die Lokalisierung von $R$ an $M$ und $\mathfrak{m} = M \cdot A$.*

*(i) Ist $\chi$ die Samuel-Funktion des lokalen Rings $A$ und $\varphi$ die Hilbert-Funktion vom graduierten Ring $R$, so gilt $\varphi(n) = \chi(n) - \chi(n-1)$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$.*

*(ii) $dim(R) = ht(M) = dim(A) = deg(\varphi) + 1$.*

*(iii) $gr_{\mathfrak{m}}(A) \cong R$ als graduierte Ringe.*

*Beweis.* $M$ ist ein maximales Ideal von $R$, sodass $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong M^n/M^{n+1} \cong R_n$. Daher gilt $\chi(n) - \chi(n-1) = l(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) = l(R_n) = \varphi(n)$ für hinreichend großes $n$ nach Korollar 3.3 (damit folgt (i)) und ebenso $dim(A) \overset{5.3}{=} d(A) = deg(\chi) = 1 + deg(\varphi)$, wobei die letzte Gleichung wie im Beweis von 5.3 folgt. Wegen $A = R_M$ gilt $dim(A) = ht(M)$. Daher müssen wir nur noch zeigen, dass $dim(R) = ht(M)$ gilt.
Nehmen wir an, dass $R$ ein Integritätsbereich ist, sodass aus Beispiel 3.5 (iii) und Thm. 5.6 in [Mat06] folgt, dass

$$1 + deg(\varphi) = d(R) \geq trdeg(Quot(R)|K) = dim(R) \geq ht(M).$$

Zusammen folgt $ht(M) = dim(A) = 1 + deg(\varphi)$ und $dim(R) = ht(M)$.
Für allgemeine $R$ seien $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_t$ die minimalen Primideale von $R$. Nach Theorem 6.2 sind all diese auch homogen und jedes $R/\mathfrak{p}_i$ ist ein graduierter Ring. Nach eventueller Umnummerierung ist $dim(R) = dim(R/\mathfrak{p}_1)$ und mit obigem Resultat

$$dim(R) = dim(R/\mathfrak{p}_1) = ht(M/\mathfrak{p}_1) \leq ht(M) \leq dim(R).$$

Wie in (ii) gefordert folgt $dim(R) = ht(M)$.
Es gilt $R_n \subseteq M^n \subseteq \mathfrak{m}^n$ mit $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong R_n$. Bilden wir also ein Element $x \in R_n$ in $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ ab, so wird ein bijektiver Ringhomomorphismus $R \to gr_{\mathfrak{m}}(A)$ induziert, der (iii) erfüllt. $\square$

**Theorem 6.4**
*Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann gilt $dim(R) = dim(gr_{\mathfrak{m}}(R))$.*

*Beweis.* Sei $\varphi$ das Hilbert-Polynom des assoziierten graduierten Ringes $gr_{\mathfrak{m}}(R)$. Nach Korollar 3.3 und Theorem 5.3 gilt $dim(R) = 1 + deg(\varphi)$ und dies ist nach Theorem 6.3 gleich $dim(gr_{\mathfrak{m}}(R))$. $\square$

**Theorem 6.5**
*Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist dim(R[t]) = dim(R) + 1.*

Bevor wir diese Aussage beweisen können, benötigen wir einige Vorarbeit.

**Lemma 6.6**
*Sei R ein beliebiger Ring.*

*(i) Sind* $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ *Primideale von* $R[t]$ *mit* $\mathfrak{p}_1 \cap R = \mathfrak{p}_2 \cap R =: \mathfrak{p}$*, so gilt* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}R[t]$*.*

*(ii) Seien* $I \subseteq R$ *ein Ideal und* $I \subseteq \mathfrak{p}$ *ein Primideal von R. Sei* $J := IR[t]$ *und* $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}R[t]$*. Ist* $\mathfrak{p}$ *ein minimales Primideal über I, so ist* $\mathfrak{q}$ *minimal über J.*

*(iii) Seien R noethersch und* $\mathfrak{p} \subseteq R$ *ein Primideal von R und* $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}R[t]$*. Dann ist* $ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{q})$

*Beweis.* (i) Sei $i \in \{1, 2\}$. Wir definieren $\bar{\mathfrak{p}_i} := \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}R[t]$. $\bar{\mathfrak{p}_1}$ und $\bar{\mathfrak{p}_2}$ sind Primideale von $(R/\mathfrak{p})[t] \cong R[t]/\mathfrak{p}[t]$, denn

$$(R[t]/\mathfrak{p}R[t])/\bar{\mathfrak{p}_i} = (R[t]/\mathfrak{p}R[t])/(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}R[t]) \cong R[t]/\mathfrak{p}_i$$

ist ein Integritätsbereich. Mit der echten Inklusion $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ gilt dann auch die folgende Inklusion

$$(R/\mathfrak{p})[t]/\bar{\mathfrak{p}_1} = (R/\mathfrak{p})/\mathfrak{p}_1 \supsetneq (R/\mathfrak{p})/\mathfrak{p}_2 \cong (R/\mathfrak{p})[t]/\bar{\mathfrak{p}_2}.$$

Sei $x \in R$ mit $x + \mathfrak{p}R[t] \in \bar{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}R[t]$. Dann ist $x \in (R \cap \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}R[t] = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}R[t] = 0$. Sei nun $S := (R/\mathfrak{p}) \setminus \{0\} \subseteq (R/\mathfrak{p})$. Dann ist $(R/\mathfrak{p})[t]S^{-1} \cong (R/\mathfrak{p})S^{-1}[t] = Quot(R/\mathfrak{p})[t]$ ein Hauptidealring. Der kanonische Ringhomomorphismus $(R/\mathfrak{p}) \to (R/\mathfrak{p})S^{-1}$ induziert die injektive Abbildung $Spec((R/\mathfrak{p})S^{-1}) \to Spec(R/\mathfrak{p})$ mit Bild $\{\mathfrak{q} \in Spec(R/\mathfrak{p}) \,|\, \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}$. Mit dieser injektiven Abbildung folgt aus $\bar{\mathfrak{p}_1} \cap (R/\mathfrak{p}) = \bar{\mathfrak{p}_2} \cap (R/\mathfrak{p}) = 0$, dass $0 = \bar{\mathfrak{p}_1}S^{-1} \subsetneq \bar{\mathfrak{p}_2}S^{-1}$ und damit $\bar{\mathfrak{p}_1} = 0$ gilt. Wir erhalten $0 = \bar{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}R[t]$ und damit $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}R[t]$.

(ii) Es ist $R[t]/\mathfrak{p}R[t] \cong (R/\mathfrak{p})[t]$ ein Integritätsbereich. Modulo des Ideals $I$ können wir $I = 0$ annehmen. Angenommen, $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q} \subseteq R[t]$. Dann ist $\mathfrak{q}_1 \cap R \subseteq \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}R[t] \cap R = \mathfrak{p}$. Wegen Minimalität gilt $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}$. Dann wäre nach (i) $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}R[t] = \mathfrak{q}$ und wir erhalten einen Widerspruch.

(iii) Sei $ht(\mathfrak{p}) = n$. Nach Theorem 6.1 (i) existiert ein Ideal $I \subseteq R$, das von $n$ Elementen erzeugt wird, sodass $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal ist, das $I$ enthält. Dann ist $\mathfrak{q}$ minimal über $J := I \cdot R[t]$ wie in (ii). Aber $J$ wird über $R[t]$ von $n$ Elementen erzeugt, also gilt nach dem Krull'schen Höhensatz ebenfalls $ht(\mathfrak{q}) \leq ht(\mathfrak{p})$. Umgekehrt gilt für eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \subseteq R$ mit $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_iR[t]$ auch $\mathfrak{q}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}$ und damit $ht(\mathfrak{q}) \geq ht(\mathfrak{p})$.

□

*Beweis von Theorem 6.5.* Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Primidealkette in $R$. Ist $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}_nR[t]$, so gilt $ht(\mathfrak{q}_n) = ht(\mathfrak{p}_n)$ nach Lemma 6.6 (iii). Aber wir können die Primidealkette in $R[t]$ verlängern, indem wir $\mathfrak{q}_{n+1} = (\mathfrak{q}, t)$ setzen. Daraus folgt bereits $dim(R[t]) \geq dim(R) + 1$.
Betrachten wir nun die Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_n$ in $R[t]$ und setzen $\mathfrak{p}_i = R \cap \mathfrak{q}_i$. Wir können annehmen, dass nicht alle $\mathfrak{p}_i$ verschieden sind (sonst $dim(R) \geq dim(R[t]) \geq dim(R[t]) - 1$). Sei $j = max\{i \in \{0, ..., n-1\} \,|\, \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_{i+1}\}$. Nach Lemma 6.6 (i) ist dann $\mathfrak{q}_j = \mathfrak{p}_jR[t]$ und nach (iii) ist dann

$$ht(\mathfrak{p}_j) = ht(\mathfrak{q}_j) \geq j.$$

Aber nach Wahl von $j$ gilt

$$\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_{j+1} \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

und damit $ht(\mathfrak{p}_j) + n - j - 1 \leq dim(R)$. Mit der obigen Abschätzung gilt dann $n - 1 \leq dim(R)$ und damit $dim(R[t]) \leq 1 + dim(R)$. □

**Korollar 6.7**
*Ist $R$ noethersch, so gilt $dim(R[t_1, ..., t_n]) = n + dim(R)$.*

*Beweis.* Folgt per Induktion nach $n$ aus Theorem 6.5. □

*Bemerkung.* Sei $K$ ein Körper. Dass $dim(K[t_1, ..., t_n]) = dim(K) + n = n$ gilt, wissen wir aus dem Noether'schen Normalisierungssatz. Nun haben wir es im allgemeineren Fall gesehen.

**Proposition 6.8**
*Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Dann gilt $dim(R) \leq dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Insbesondere hat $R$ endliche Krulldimension.*

*Beweis nach [Bos13].* Da $R$ noethersch ist, ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt und damit gilt $dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) < \infty$ als $(R/\mathfrak{m})$-Vektorraum. Wählen wir geeignete $a_1, ..., a_r \in \mathfrak{m}$ und deren Bilder als $(R/\mathfrak{m})$-Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, so folgt aus dem Lemma von Nakayama, dass die $a_i$ das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ erzeugen. Dann gilt auch $dim(R) = ht(\mathfrak{m}) \leq r = dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ nach Theorem 5.4. □

**Proposition 6.9**
*Ist $R$ noethersch und $a \in R$ kein Nullteiler, so hat jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ über $(a)$ Höhe 1.*

*Beweis.* Aus dem Hauptidealsatz von Krull folgt, dass $ht(\mathfrak{p}) \leq 1$. Nehmen wir $ht(\mathfrak{p}) = dim(R_\mathfrak{p}) = 0$ an. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von $R$ und besteht daher aus Nullteilern (vgl. [Eis94], Thm. 3.1). Das steht im Widerspruch zu $a \in \mathfrak{p}$. □

**Proposition 6.10**
*Sei $(R, \mathfrak{m})$ noethersch lokal. Sei $x \in \mathfrak{m}$ kein Nullteiler. Dann ist $dim(R/xR) = dim(R) - 1$.*

*Beweis.* Setze $r := dim(R/xR) \overset{5.3}{=} d(R/xR)$. Seien $x_1, ..., x_r \in R$ Elemente, die auf Erzeuger eines definierenden Ideals in $R/xR$ abgebildet werden (vgl. Lemma 4.5). Dann ist $(x, x_1, ..., x_r)$ wegen $x \in \mathfrak{m}$ ein definierendes Ideal in $R$. Dadurch folgt $dim(R) = min\{$Anzahl Erzeuger eines definierenden Ideals$\} \leq r + 1$, wobei die erste Gleichung wiederum aus Lemma 4.5 folgt.
Andererseits ist $x$ in keinem minimalen Primideal von $R$ enthalten, da es kein Nullteiler ist. Somit kann man jede Primidealkette in $R/xR$ um mindestens ein Primideal, das $x$ enthält, verlängern. □

**Korollar 6.11**
*Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Sei $d := dim(R)$ und $x_1, ..., x_s \in \mathfrak{m}$ eine reguläre Folge, d.h. für $1 \leq i \leq s$ ist $x_i$ kein Nullteiler in $R/(x_1, ..., x_{i-1})$. Dann gilt $dim(R/(x_1, ..., x_i)) = d - i$ für $1 \leq i \leq s$.*

*Beweis.* folgt per Induktion aus obiger Proposition 6.10. □

**Lemma 6.12**
*Sei $R = K[\![t_1, ..., t_n]\!]$. Dann ist $dim(R) = n$.*

*Beweis.* $t_1, ..., t_n$ ist eine reguläre Folge, denn $t_i$ ist kein Nullteiler in $K[\![t_1, ..., t_n]\!]/(t_1, ..., t_{i-1}) \cong K[\![t_i, ..., t_n]\!]$. Aus Korollar 6.11 folgt $dim(K[\![t_1, ..., t_n]\!]) = dim(K[\![t_1, ..., t_n]\!]/(t_1, ..., t_n)) + n = dim(K) + n = n$. □

**Korollar 6.13**
*Seien $R$ noethersch, $I \subsetneq R$ ein Ideal. Wir definieren die Höhe eines beliebigen Ideals $ht(I) := min\,\{ht(\mathfrak{p}) \,|\, I \subseteq \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$. Dann gilt $ht(I) < \infty$.*

*Beweis.* haben wir im Beweis vom Krull'schen Höhensatz gesehen. □

## 6.2 Beispiele zum Krull'schen Höhensatz

**Beispiel 6.14** (dafür, dass der Krull'sche Höhensatz ohne einen noetherschen Grundring i.A. nicht gilt)
Beispiel nach einer Idee von [use].
Seien $K$ ein Körper und $R = K[X, XY, XY^2, ...] = K + X \cdot K[X, Y]$ und $I = (X)$.
Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von $R$ mit $X \in \mathfrak{p}$. Dann ist auch $(XY^m)^2 = X(XY^{2m}) \in \mathfrak{p}$.
Dann gilt auch $(X, XY, XY^2, ...) \subseteq \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Aber wegen $R/(X, XY, XY^2, ...) \cong K$ ist $(X, XY, XY^2, ...)$ auch maximal und damit gilt $\mathfrak{p} = (X, XY, XY^2 ...)$.
Damit haben wir eine Primidealkette $0 \subsetneq (XY, XY^2, ...) \subsetneq \mathfrak{p}$ der Länge 2, da $R/(XY, XY^2, ...) \cong K[X]$ ein Hauptidealring, insb. ein Integritätsbereich ist. Damit gilt

$$ht(\mathfrak{p}) \geq 2 > |\{X\}|$$

und der Krull'sche Höhensatz (bzw. der Spezialfall, der Hauptidealsatz) geht schief. Dies liegt daran, dass $R$ kein noetherscher Ring ist: Die Folge der Ideale $(XY) \subsetneq (XY, XY^2) \subsetneq ...$ wird nämlich nicht stationär.

**Beispiel 6.15**
Sei $X = V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq Spec(\mathbb{R}[x, y])$ der Einheitskreis, $R = \mathbb{R}[x, y]/I$ der Koordinatenring mit $I = (x^2 + y^2 - 1)$ prim. Dann ist

$$\begin{aligned} dim(X) = dim(R) &= dim(\mathbb{R}[x, y]) - ht(x^2 + y^2 - 1) \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen einzusehen, argumentiert man wie folgt:

- $dim(X) = dim(R)$ als Gleichheit der Dimension des topologischen Raums $X$ (wobei $X \subseteq Spec(R)$ Teilmenge des topologischen Raums von $Spec(R)$ mit der Zariski-Topologie ist) und der Krulldimension des Ringes $R$. Dies gilt über die Bijektion zwischen $Spec(R/I)$ und $V(I)$, die vom kanonischen Restklassenhomomorphismus $R \to R/I$ induziert wird. Hier sei auf die Vorlesung Algebraische Geometrie I von Prof. Kohlhaase verwiesen (Kor. 1.2.16 oder alternativ [Mat06], Ex. 4.4.).

- $dim(\mathbb{R}[x, y]) = dim(\mathbb{R}) + 2 = 2$ (Bem. nach Korollar 6.7), da $\mathbb{R}$ ein Körper ist und damit nur das Eins- und das Nullprimideal besitzt.

- In $R$ ist das Polynom $(x^2 + y^2 - 1) = y^2 + (x + 1)(x - 1)$ prim, denn: Mit dem Eisensteinkriterium und dem Primideal $(x - 1) \subseteq \mathbb{R}[x][y]$ ist das Polynom $(x^2 + y^2 - 1)$ irreduzibel und damit prim in $\mathbb{R}[x][y] \cong \mathbb{R}[x, y]$.

- Das von dem Polynom erzeugte (minimale) Primideal hat Höhe 1 nach Proposition 6.9.

- Man kann zeigen, dass in $\mathbb{R}[t_1, ..., t_n]$ alle maximalen Primidealketten dieselbe Länge haben und diese Konstanz erhalten bleibt, wenn man den Ring modulo ein Primideal betrachtet (vgl. [Gat14], Prop. 11.9 (ii)).

**Beispiel 6.16**
$dim(\mathbb{Z}[x]) = 2$.

*Beweis.* Ein Hauptidealring, der kein Körper ist, hat Krulldimension 1, da dort jedes von 0 verschiedene Primideal bereits maximal ist. Mit Theorem 6.5 und $\mathbb{Z}$ Hauptidealring folgt die Aussage. □

**Beispiel 6.17** (zur Dimensionsformel für Polynomringe nach [Sei54])
Die Voraussetzung in Theorem 6.5, dass der Ring $R$ noethersch ist, ist notwendig. Ohne dies ist die Gleichung $dim(R[t]) = dim(R) + 1$ nicht zwangsläufig richtig. Tatsächlich gilt nämlich im Allgemeinen nur die Ungleichung

$$dim(R) + 1 \leq dim(R[t]) \leq 2 \cdot dim(R) + 1$$

und die Krulldimension des Polynomrings über $R$ kann jeden dieser Werte annehmen.
Ein Beispiel (nach einer Idee von [Sla]) lässt sich wie folgt konstruieren:
Sei $K$ ein Körper, $s$ transzendent über $K$ und $A := \{f \in K(s)[\![Y]\!] \,|\, f(0) \in K\}$. Dann besteht $Spec(A) = \{(0), \mathfrak{p}\}$ nur aus zwei Elementen und besitzt ein von 0 verschiedenes Primideal $\mathfrak{p} = \{f \in K(s)[\![Y]\!] \,|\, f(0) = 0\}$ mit $A/\mathfrak{p} \cong K$: Beachte zunächst, dass jedes $f \in K(s)[\![Y]\!]$ mit $f(0) = 0$ geschrieben werden kann als $f = y^n u$ mit $n > 0$ und $u(0) \neq 0$. Dann ist $u \in K(s)[\![Y]\!]^\times$ (Theorie der formalen Potenzreihen) und daher auch $\tilde{f} = y^n u^{-1} \in K(s)[\![Y]\!]$. Wegen $n > 0$ gilt sogar $\tilde{f}(0) = 0 \in K \subseteq K(s)$ und daher $f, \tilde{f} \in A$. Nun sein $0 \neq \mathfrak{q} \in Spec(A)$ beliebig. Wähle $0 \neq f \in \mathfrak{q}$ fest und sei $g \in \mathfrak{p}$ beliebig. Schreibe $f = y^n u$, $g = y^m v$ wie oben. Dann gilt

$$g^{n+1} = y^{(n+1)m} v^{n+1} = y^n u \underbrace{y^{n(m-1)+m} u^{-1} v^{n+1}}_{\in A} \in fA \subseteq q$$

und daher $g \in \mathfrak{q}$, da $\mathfrak{q}$ prim. Es folgt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ und damit Gleichheit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, da $\mathfrak{p}$ maximal ist. Folglich gilt $dim(A) = 1$.
Nun konstruieren wir eine Primidealkette der Länge 3 in $A[t]$ und betrachten hierfür $\varphi : A[t] \to K(s)[\![Y]\!]$, $p(t) \mapsto p(s)$. $im(\varphi) \subseteq K(s)[\![Y]\!]$ ist ein Integritätsbereich, sodass $ker(\varphi)$ ein Primideal ist. Aber es gilt $Yt - Ys \in ker(\varphi)$, obwohl $Y \notin ker(\varphi)$, d.h. $0 \neq ker(\varphi) \subsetneq \mathfrak{p}[t]$. Außerdem ist $A[t]/\mathfrak{p}[t] \cong (A/\mathfrak{p})[t] \cong K[t]$ ein Integritätsbereich, aber kein Körper, d.h. es existiert ein maximales Ideal von $A[t]$ mit $\mathfrak{p}[t] \subsetneq \mathfrak{m}$ Daher gilt

$$(0) \subsetneq ker(\varphi) \subsetneq \mathfrak{p}[t] \subsetneq \mathfrak{m}$$

und wie gewünscht $dim(A[t]) = 3 \neq dim(A) + 1$.

# Literatur


[Kru38] Wolfgang Krull. “Dimensionstheorie in Stellenringen”. In: *J. reine angew. Math.* 179 (1938).

[Sei54] Abraham Seidenberg. “On the Dimension Theory of Rings (II)”. In: *Pacific J. Math.* 4.4 (1954), S. 603–614.

[AM69] Michael Atiyah und Ian MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[Eis94] David Eisenbud. *Commutative Algebra. with a View Toward Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1994.

[Ash03] Robert B. Ash. *A Course In Commutative Algebra*. 2003. URL: `https://faculty.math.illinois.edu/~r-ash/ComAlg.html`.

[Mat06] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. 9th Printing. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[Bos13] Siegfried Bosch. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. London: Springer-Verlag, 2013.

[Gat14] Andreas Gathmann. *Commutative Algebra. Class Notes TU Kaiserslautern 2013/14*. 2014. URL: `http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/commalg-2013/commalg-2013-c11.pdf`.

[Sla] Slade. *Examples of rings whose polynomial rings have large dimension*. URL: `https://math.stackexchange.com/q/1267652`.

[use] user26857. *What are some examples of principal, proper ideals that have height at least 2?* URL: `https://math.stackexchange.com/q/1244823`.

# Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die ich wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe, und mich keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Die Arbeit hat in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, den 3. September 2018

...............................................

Aleksander Grochowicz