Masterarbeit

Die Fargues-Fontaine-Kurve in gleicher Charakteristik

Marc Kohlhaw

vorgelegt am
1. September 2020

betreut von
Prof. Dr. Jan Kohlhaase
Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion der Fargues-Fontaine-Kurve in gleicher Charakteristik sowie der Nachweis ihrer wesentlichen geometrischen Eigenschaften. Dabei orientieren wir uns in weiten Teilen an der Originalarbeit [FF1].

Wir behandeln zunächst die grundlegende Theorie der unendlichen Laurentreihen in einer Variablen t über einem nichtarchimedischen Körper F.

Das grundlegende Objekt bei der Konstruktion der Kurve ist eine F-Fréchetalgebra B, deren Elemente als konvergente Laurentreihen auf der offenen punktierten Einheitskreisscheibe in F angesehen werden können.

Die auf einem abgeschlossenen Kreisring konvergenten Reihen bilden eine F-Banachalgebra bezüglich einer verallgemeinerten Gaussnorm. Mithilfe eines Weierstraßschen Divisionssatzes und des dazugehörigen Vorbereitungssatzes zeigen wir, dass diese Ringe Hauptidealringe sind. Dieses Ergebnis geht ursprünglich auf M. Lazard zurück. Der Ring B ist dann der Schnitt der Ringe konvergenter Reihen auf abgeschlossenen Kreisringen in der punktierten offenen Einheitskreisscheibe.

Für die Konstruktion der Kurve nehmen wir zusätzlich an, dass F positive Charakteristik p besitzt, perfekt ist und den endlichen Körper $k := \mathbb{F}_q$ mit q Elementen enthält, wobei q eine p-Potenz ist. Der Frobenius auf F liefert dann einen Endomorphismus von B, der durch die q-Potenzierung der Koeffizienten gegeben ist.

Wir bezeichnen mit $B^{\varphi=t^n}$ seinen t^n-Eigenraum für $n \in \mathbb{Z}$. Diese sind nur für $n \geqslant 0$ ungleich 0. Setzen wir $E := k((t))$, so ist $B^{\varphi=1} = E$, und der Ring $P := \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}$ ist eine graduierte E-Algebra. Nun definieren wir die Fargues-Fontaine-Kurve als das E-Schema

$$X_{E,F} := Proj(P) = Proj(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}).$$

Zur Untersuchung der geometrischen Eigenschaften von $X_{E,F}$ benötigen wir den Raum $|Y|$ der abgeschlossenen maximalen Ideale von B. Im Sinne der rigiden Geometrie handelt es sich um die abgeschlossenen Punkte der punktierten offenen Einheitskreisscheibe über F (vgl. auch Bemerkung 2.39). Auf diesem Raum betrachten wir effektive Divisoren. Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist der Ring P graduiert faktoriell, d.h. jedes homogene Element lässt sich im Wesentlichen eindeutig als Produkt homogener Elemente vom Grad 1 schreiben.

Mithilfe der Theorie formaler Gruppen und Lubin-Tate-Moduln erhalten wir die fundamentale exakte Sequenz

$$0 \to E \to B^{\varphi=t} \to F \to 0,$$

mit deren Hilfe sich die wesentlichen geometrischen Eigenschaften der Kurve nachweisen lassen. Insbesondere handelt es sich tatsächlich um eine Kurve, d.h. um ein separiertes, irreduzibles, noethersches, eindimensionales Schema (vgl. Satz 3.6(ii)). Man kann X auffassen als einen Quotienten der offenen Einheitskreisscheibe in F modulo der Operation des Frobenius (vgl. Satz 3.6(iv)). Darüber hinaus werden wir einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur projektiven Geraden aufzeigen.

Abschließend untersuchen wir die Picardgruppe der Kurve und konstruieren interessante Vektorbündel mit Hilfe von Galoisüberlagerungen, die sich aus dem Wechsel des Körpers E ergeben. Die Klassifikation der Vektorbündel auf der Kurve zitieren wir ohne Beweis. Sie hat zu einer neuen Sichtweise auf viele aktuelle Fragen der arithmetischen Geometrie geführt.

2 Laurentreihen

In diesem Kapitel führen wir im ersten Abschnitt die grundlegende Theorie der konvergenten Laurentreihen über einem nichtarchimedischen Körper ein. Das erste Ziel ist der Beweis des Weierstraßschen Divisionssatzes und des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes für konvergente Laurentreihen auf einem abgeschlossenen Kreisring.

Die ersten beiden Abschnitte orientieren sich sehr stark an [Sch], §8.

Danach wollen wir in Abschnitt 2.3 dieses Wissen nutzen, um den Ring der konvergenten Laurentreihen auf der offenen punktierten Einheitskreisscheibe auf seine algebraischen Eigenschaften zu untersuchen.

2.1 Grundlagen

Sei F ein vollständiger nicht-archimedisch bewerteter Körper. Wir bezeichnen mit $|\cdot| : F \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ den Absolutbetrag auf F. Sei $\overline{F}$ ein algebraischer Abschluss von F.

Definition 2.1. Eine *(unendliche) Laurentreihe* mit Koeffizienten in F ist eine formale Reihe $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n$ mit $c_n \in F$. Wir schreiben $F((t, t^{-1}))$ für den F-Vektorraum aller unendlichen Laurentreihen mit Koeffizienten in F. Im Fall $c_n = 0$ für alle $n < 0$ sprechen wir von einer formalen Potenzreihe. Für eine Teilmenge $I \subseteq [0, \infty)$ sei

$$B_I := \{f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in F((t, t^{-1})) \mid c_n \in F,\ \forall \rho \in I : \lim_{|n|\to\infty} |c_n|\rho^n = 0\}$$

die *Menge der I-konvergenten Laurentreihen* über F, wobei im Fall $0 \in I$ per Konvention $c_n = 0$ für alle $n < 0$ gelten soll. In diesem Fall gilt also $B_I \subseteq F[[t]]$.

Bemerkung 2.2. (i) Die Menge B_I ist ein F-Vektorraum.

(ii) Für ein kompaktes Intervall $I = [\sigma, \rho]$ mit reellen Zahlen $0 < \sigma \leqslant \rho$ ist $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n$ genau dann I-konvergent, wenn

$$\lim_{n\to\infty} |c_{-n}|\sigma^{-n} = \lim_{n\to\infty} |c_n|\rho^n = 0.$$

Im Fall $\sigma = 0$ ist f genau dann $[0, \rho]$-konvergent, wenn

$$c_n = 0 \text{ für alle } n < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} |c_n|\rho^n = 0.$$

(iii) Für $I \subseteq J \subseteq [0, +\infty)$ ist $B_J \subseteq B_I$.

(iv) Für $I \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt

$$B_I = \bigcap_{\rho\in I} B_{\{\rho\}}$$

im F-Vektorraum der formalen unendlichen Laurentreihen. Im Folgenden schreiben wir B_ρ anstelle von $B_{\{\rho\}}$.

(v) Ist $\rho > 0$ und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B_\rho$, so existiert $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|\rho^n$ aufgrund der Konvergenzbedingung $\lim_{|n|\to\infty} |c_n|\rho^n = 0$.

Definition 2.3. Ist $\rho > 0$, so heißt die Abbildung

$$|\cdot|_\rho : B_\rho \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad |\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n|_\rho := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|\rho^n = \max_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|\rho^n,$$

die *Gaussnorm* zu ρ.

Bemerkung 2.4. (i) Die Gaussnorm zu $\rho > 0$ definiert eine F-Vektorraumnorm auf B_ρ.

(ii) Formal setzt man für $\rho = 0$ und $f = \sum_{n\geqslant 0} c_n t^n \in B_0 = F[[t]]$

$$|f|_0 = q^{-\min\{n\geqslant 0 | c_n \neq 0\}}$$

für ein fest gewähltes $q > 1$. Das ist ein nichtarchimedischer Absolutbetrag, allerdings keine F-Norm, da er auf F den trivialen Absolutbetrag induziert.

Lemma 2.5. *Sei $\rho \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B_\rho$. Dann ist für jedes $x \in \overline{F}$ mit $|x| = \rho$ die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n x^n$ konvergent in $\overline{F}$.*

Beweis. Wir wählen eine endliche Erweiterung E von F mit $x \in E$. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung des Absolutbetrages $|\cdot|$ auf E, und E ist bezüglich dieser Norm vollständig. Wir schreiben einfach $|\cdot|$ für beide Normen. Wir zeigen zunächst die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in E. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir dazu $s_k := \sum_{n=0}^{k} c_n x^n \in E$. Wir müssen zeigen, dass die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in E konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $f \in B_\rho$ können wir $N \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $|c_n|\rho^n < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$ gilt. Dann gilt für alle $m \geqslant N$

$$|s_m - s_N| = |\sum_{n=N+1}^{m} c_n x^n| \leqslant \max_{N+1\leqslant n\leqslant m} |c_n|\rho^n < \varepsilon.$$

Somit ist die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E und damit konvergent in E, also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in E. Die Konvergenz von $\sum_{n<0} c_n x^n$ zeigt man im Fall $\rho > 0$ analog. Das beendet den Beweis, da im Fall $\rho = 0$ der Hauptteil ohnehin verschwindet. □

Lemma 2.6. *Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ eine beliebige Teilmenge und seien $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n, g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n t^n \in B_I$. Dann konvergiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Reihe $c_n := \sum_{k+l=n} a_k b_l$ in F, es gilt $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B_I$, und die durch*

$$f \cdot g := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n$$

definierte Multiplikation macht den F-Vektorraum B_I zu einem Integritätsbereich.
Es gilt $|fg|_\rho = |f|_\rho \cdot |g|_\rho$ für alle $f, g \in B_I$ und alle $\rho \in I \setminus \{0\}$.

Beweis. Es genügt, den Fall $I = \{\rho\}$ zu betrachten.

Im Fall $\rho = 0$ ist per Definition $B_\rho = F[[t]]$ der Ring der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in F. Das ist ein Integritätsbereich bezüglich der oben definierten Multiplikation, und $|\cdot|_0$ ist multiplikativ.

Sei nun $\rho > 0$ und seien $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n, g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n t^n \in B_\rho$. Wir zeigen zunächst, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Reihe

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$$

in F konvergiert. Da F vollständig nicht-archimedisch bewertet ist, genügt es für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{|k|\to\infty} a_k b_{n-k} = 0$$

in F zu zeigen.

Sei also $n \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{|l|\to\infty} |a_l|\rho^l = \lim_{|l|\to\infty} |b_l|\rho^l = 0$ gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_l|\rho^l < \sqrt{\varepsilon\rho^n} \quad \text{und} \quad |b_l|\rho^l < \sqrt{\varepsilon\rho^n}$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$ mit $|l| \geqslant N_1$. Wir wählen $K = N_1 + |n|$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $|k| \geqslant K$

$$|a_k b_{n-k}| = \rho^{-n}|a_k|\rho^k |b_{n-k}|\rho^{n-k} < \rho^{-n}\sqrt{\varepsilon\rho^n}\sqrt{\varepsilon\rho^n} = \varepsilon.$$

Als nächstes zeigen wir $\lim_{|n|\to\infty} |c_n|\rho^n = 0$. Ist $|f|_\rho = 0$ oder $|g|_\rho = 0$, so gilt $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Es gelte nun $|f|_\rho \neq 0 \neq |g|_\rho$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{|m|\to\infty} |a_m|\rho^m = \lim_{|m|\to\infty} |b_m|\rho^m = 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_m|\rho^m < \frac{\varepsilon}{|g|_\rho} \quad \text{und} \quad |b_m|\rho^m < \frac{\varepsilon}{|f|_\rho}$$

für alle $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| \geqslant N$. Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geqslant 2N$. Sind $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k + l = n$, so gilt $|k| \geqslant N$ oder $|l| \geqslant N$. Im ersten Fall ist

$$|a_k|\rho^k |b_l|\rho^l < \frac{\varepsilon}{|g|_\rho}|b_l|\rho^l \leqslant \varepsilon.$$

Analog ist im Fall $|l| \geqslant N$

$$|a_k|\rho^k |b_l|\rho^l < |a_k|\rho^k \frac{\varepsilon}{|f|_\rho} \leqslant \varepsilon.$$

Es folgt insgesamt

$$|c_n|\rho^n = |\sum_{k+l=n} a_k b_l|\rho^n \leqslant \max_{k+l=n} |a_k|\rho^k |b_l|\rho^l < \varepsilon.$$

Damit gilt $\lim_{|n|\to\infty} |c_n|\rho^n = 0$ und somit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B_\rho$. Man rechnet direkt nach, dass B_ρ mit der oben definierten Multiplikation eine kommutative F-Algebra ist.

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} |fg|_\rho = \max_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|\rho^n &= \max_{n\in\mathbb{Z}} |\sum_{k+l=n} a_k b_l|\rho^n \\ &\leqslant \max_{n\in\mathbb{Z}}(\max_{k+l=n} |a_k|\rho^k |b_l|\rho^l) \\ &\leqslant (\max_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\rho^k)(\max_{l\in\mathbb{Z}} |b_l|\rho^l) \\ &= |f|_\rho |g|_\rho. \end{aligned}$$

Für die umgekehrte Ungleichung seien $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$ die kleinsten Indizes mit $|a_{k_0}|\rho^{k_0} = |f|_\rho$ und $|b_{l_0}|\rho^{l_0} = |g|_\rho$ und sei $n_0 = k_0 + l_0$. Sind $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $n_0 = k + l$, so gilt $k \leqslant k_0$ oder $l \leqslant l_0$. Ist $k \neq k_0$ oder $l \neq l_0$, so folgt

$$|a_k|\rho^k < |f|_\rho \quad \text{oder} \quad |b_l|\rho^l < |g|_\rho$$

und damit im Fall $k + l = n_0$ mit $(k, l) \neq (k_0, l_0)$ stets

$$|a_k b_l|\rho^{n_0} < |f|_\rho |g|_\rho = |a_{k_0}||b_{l_0}|\rho^{n_0}.$$

Aus der strikten Dreiecksungleichung folgt

$$|c_{n_0}|\rho^{n_0} = |\sum_{k+l=n_0} a_k b_l|\rho^{n_0} = |a_{k_0}||b_{l_0}|\rho^{n_0}$$

und daraus

$$|fg|_\rho \geqslant |c_{n_0}|\rho^{n_0} = |a_{k_0}|\rho^{k_0}|b_{l_0}|\rho^{l_0} = |f|_\rho |g|_\rho.$$

Das zeigt die behauptete Gleichheit, und diese zeigt, dass B_ρ nullteilerfrei ist. □

Bemerkung 2.7. Ist $\rho \geqslant 0$ und $x \in \overline{F}$ mit $|x| = \rho$, so ist die nach Lemma 2.5 wohldefinierte Abbildung

$$\varphi_x : B_\rho \to \overline{F}, \varphi_x(f) = f(x),$$

ein Homomorphismus von F-Algebren mit $|f(x)| \leqslant |f|_\rho$.

Definition 2.8. Sei $I \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein kompaktes Intervall. Wir definieren die Abbildung

$$|\cdot|_I : B_I \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, f \mapsto |f|_I := \begin{cases} \sup\{|f|_\rho : \rho \in I \setminus \{0\}\}, & \text{falls } I \neq \{0\} \\ |f|_0, & \text{falls } I = \{0\}. \end{cases}$$

Ist $I = \{\rho\}$, so schreiben wir weiterhin $|\cdot|_\rho$.

Lemma 2.9. *(i) Ist $I = [\sigma, \rho] \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein kompaktes Intervall mit $\rho > 0$, so gilt im Fall $\sigma \neq 0$ stets $|f|_I = \max\{|f|_\sigma, |f|_\rho\}$ und im Fall $\sigma = 0$ stets $|f|_I = |f|_\rho$ für alle $f \in B_I$.*

$|\cdot|_I$ definiert eine Norm auf dem Ring B_I.

(ii) Für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist der Ring B_I vollständig bezüglich $|\cdot|_I$.

(iii) Sind $I \subseteq J \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ zwei kompakte Intervalle mit $I \neq \{0\}$, so gilt $|\cdot|_I \leqslant |\cdot|_J$.

Beweis. (i): Sei $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in B_I$. Ist $\sigma \leqslant \tau \leqslant \rho$, so gilt

$$\begin{aligned} |f|_\tau &= \max\{\sup_{n<0}\{|a_n|\tau^n\}, \sup_{n\geqslant 0}\{|a_n|\tau^n\}\} \\ &\leqslant \max\{\sup_{n<0}\{|a_n|\sigma^n\}, \sup_{n\geqslant 0}\{|a_n|\rho^n\}\} \\ &\leqslant \max\{|f|_\sigma, |f|_\rho\} \end{aligned}$$

und damit $|\cdot|_I = \max\{|\cdot|_\sigma, |\cdot|_\rho\}$. Die Normeigenschaften von $|\cdot|_I$ folgen aus denen von $|\cdot|_\sigma$ und $|\cdot|_\rho$ sowie den Eigenschaften von $\max\{\cdot\}$.

(ii): Der Fall $I = \{0\}$ ist klar, weil $B_I = B_0 = F[[t]]$ bezüglich des t-adischen Absolutbetrags $|\cdot|_0$ vollständig ist. Sei also $I = [\sigma, \rho]$, $0 \leqslant \sigma < \rho$, ein kompaktes Intervall und sei $(f_m)_{m\geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in B_I. Angenommen, jeder der Ringe B_τ für $\tau \in I \setminus \{0\}$ ist vollständig bezüglich $|\cdot|_\tau$. Wir schreiben $f_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{(m)} t^n$ mit $a_n^{(m)} \in F$ und setzen $f^+ := \sum_{n\geqslant 0} a_n^{(m)} t^n \in F[[t]]$ sowie $f^- := \sum_{n<0} a_n^{(m)} t^n \in t^{-1}F[[t^{-1}]]$. Die Folgen $(f_m^\pm)_{m\geqslant 0}$ sind ebenfalls Cauchyfolgen in B_I und damit insbesondere in B_τ bezüglich $|\cdot|_\tau$ für jedes $\tau \in I$. Insbesondere konvergiert aufgrund der Vollständigkeit der Ringe B_τ die Folge $(f_m^+)_{m\geqslant 0}$ in B_ρ bezüglich $|\cdot|_\rho$ gegen ein Element $f^+ \in B_\rho$. Analog konvergiert die Folge $(f_m^-)_{m\geqslant 0}$ in B_σ gegen ein Element $f^- \in B_\sigma$. Die Konvergenz impliziert ferner $f^+ \in F[[t]]$ und $f^- \in t^{-1}F[[t^{-1}]]$. Nun gilt aber $|\cdot|_\tau \leqslant |\cdot|_\rho$ auf $B_I \cap F[[t]]$ für alle $0 < \tau \leqslant \rho$ und $|\cdot|_\tau \leqslant |\cdot|_\sigma$ auf $B_I \cap t^{-1}F[[t^{-1}]]$ für alle $\sigma \leqslant \tau < \infty$. Das zeigt $f_m^+ \to f^+$ in $B_{[0,\rho]}$ und $f_m^- \to f^-$ in $B_{[\sigma,\infty)}$. Es folgt $f^\pm \in B_I$. Setzen wir $f := f^+ + f^- \in B_I$, so folgt außerdem $\lim_{m\to\infty} f_m = f$ in B_I, d.h. B_I ist vollständig bezüglich $|\cdot|_I$. Es genügt also zu zeigen, dass für jedes $\rho > 0$ der Ring B_ρ vollständig bezüglich $|\cdot|_\rho$ ist.

Sei $(f_m)_{m\geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in B_ρ. Schreibe $f_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n^{(m)} t^n$ mit $a_n^{(m)} \in F$. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wegen der Cauchyeigenschaft gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_m - f_N|_\rho < \varepsilon\rho^k$$

für alle $m \geqslant N$. Es ergibt sich

$$|a_k^{(m)} - a_k^{(N)}|\rho^k \leqslant \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n^{(m)} - a_n^{(N)}|\rho^n = |f_m - f_N|_\rho < \varepsilon\rho^k$$

und somit

$$|a_k^{(m)} - a_k^{(N)}| < \varepsilon$$

für alle $m \geqslant N$. Damit ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Folge der Koeffizienten $(a_k^{(m)})_{k\geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in F, konvergiert also gegen ein Element $a_k \in F$. Wir zeigen, dass $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ ein Element von B_ρ ist, und dass $\lim_{m\to\infty} f_m = f$ in B_ρ gilt.

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der Cauchyeigenschaft $M \geqslant 0$, so dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^{(k)} - a_n^{(l)}|\rho^n = |f_k - f_l|_\rho < \varepsilon$$

für alle $k \geqslant l \geqslant M$. Nun ist $|\cdot| : F \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ stetig. Daher folgt für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$|a_n - a_n^{(M)}|\rho^n = \lim_{k\to\infty} |a_n^{(k)} - a_n^{(M)}|\rho^n \leqslant \varepsilon.$$

Wegen $f_M \in B_\rho$ gibt es außerdem $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geqslant N$

$$|a_n^{(M)}|\rho^n < \varepsilon.$$

Für solche n folgt

$$|a_n|\rho^n \leqslant \max\{|a_n - a_n^{(M)}|, |a_n^{(M)}|\} \leqslant \varepsilon$$

und damit ist $f \in B_\rho$. Wie oben gesehen gilt nun für alle $l \geqslant M$

$$|f - f_l|_\rho = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n - a_n^{(l)}|\rho^n \leqslant \varepsilon,$$

was die Konvergenz der Folge gegen f zeigt.

(iii): trivial. □

Das nächste Ziel ist der Beweis des Weierstraßschen Divisionssatzes und des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes in B_I für ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Definition 2.10. Sei $I = [\sigma, \tau]$ ein kompaktes Intervall mit $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ und sei $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in B_I$. Ein Element $\rho \in I \setminus \{0\}$ heißt *kritischer Radius* für f, falls mindestens zwei verschiedene ganze Zahlen k, l existieren mit

$$|f|_\rho = |a_k|\rho^k = |a_l|\rho^l.$$

Lemma 2.11. *Sei $I \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein kompaktes Intervall und sei $f \in B_I \setminus \{0\}$. Dann besitzt f höchstens endlich viele kritische Radien.*

Beweis. Wir schreiben $I = [\sigma, \tau]$ und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n$ mit $a_n \in F$. Wegen $f \in B_I$ existieren $M, N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{-M}|\sigma^{-M} = \max_{n\leqslant 0} |a_n|\sigma^n \quad \text{und} \quad |a_N|\tau^N = \max_{n\geqslant 0} |a_n|\tau^n.$$

Für $n > N$ ist $|a_n|\tau^n \leqslant |a_N|\tau^N$. Ist $a_n \neq 0$, so gilt auch $a_N \neq 0$. Für $\sigma < \rho < \tau$ ergibt sich dann

$$\frac{|a_n|}{|a_N|}\rho^{n-N} < \frac{|a_n|}{|a_N|}\tau^{n-N} \leqslant 1$$

und folglich $|a_n|\rho^n < |a_N|\rho^N \leqslant |f|_\rho$ für alle $n > N$ im Fall $a_N \neq 0$.
Analog ergibt sich im Fall $a_{-M} \neq 0$ für $n > M$ stets $|a_{-n}|\rho^{-n} < |a_{-M}|\rho^{-M} \leqslant |f|_\rho$.
Falls ρ ein kritischer Radius für f im Inneren von I ist, so existieren demnach $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $-M \leqslant k < l \leqslant N$, so dass

$$0 \neq |f|_\rho = |a_k|\rho^k = |a_l|\rho^l.$$

Folglich liegen alle von σ, τ verschiedenen kritischen Radien in der endlichen Menge

$$\{(\frac{|a_k|}{|a_l|})^{\frac{1}{l-k}} \mid -M \leqslant k < l \leqslant N,\ a_k \neq 0 \neq a_l\}.$$

□

Bemerkung 2.12. Ist nun $I = [\sigma, \tau]$ ein kompaktes Intervall und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in B_I$, so schreiben wir $\rho_1 < \ldots < \rho_k$ für die kritischen Radien von f im offenen Intervall (σ, τ). Wir setzen $\rho_0 := \sigma$ und $\rho_{k+1} := \tau$. Nach dem Beweis von Lemma 2.11 existieren dann ganze Zahlen $M \leqslant N$, so dass für alle $\rho \in (\sigma, \tau)$

$$|f|_\rho = \max_{M\leqslant n\leqslant N} |a_n|\rho^n$$

und daher

$$|f|_\rho > |a_m|\rho^m$$

für alle $m < M$ und alle $m > N$.

Lemma 2.13. *Sei $I = [\sigma, \tau]$ ein kompaktes Intervall mit $\sigma < \tau$ und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in B_I$. Seien $\rho_1 < \ldots < \rho_k$ die kritischen Radien von f im offenen Intervall (σ, τ) und $\rho_0 := \sigma$ sowie $\rho_{k+1} := \tau$. Dann existiert zu jedem $i \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant i \leqslant k$ genau ein $n_i \in \mathbb{Z}$, so dass*

$$|f|_\rho = |a_{n_i}|\rho^{n_i} \ \textit{für alle}\ \rho \in I \ \textit{mit}\ \rho_i < \rho < \rho_{i+1}.$$

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant i \leqslant k$. Zu $n \in \mathbb{Z}$ sei $U_n := \{\rho \mid \rho_i < \rho < \rho_{i+1} \text{ und } |f|_\rho = |a_n|\rho^n\}$. Seien M, N ganze Zahlen wie in Bemerkung 2.12, d.h. es gilt

$$|f|_\rho = \max_{M\leqslant n\leqslant N} |a_n|\rho^n$$

und $|a_m|\rho^m < |f|_\rho$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \notin [M, N]$. Dann bilden die Mengen $U_M, \ldots, U_N$ eine disjunkte Überdeckung des zusammenhängenden Intervalls (ρ_i, ρ_{i+1}).
Außerdem ist jedes U_n eine offene Menge. Sei dazu $\rho \in U_n$. Wegen $\rho_i < \rho < \rho_{i+1}$ ist ρ kein kritischer Radius für f. Daher existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $M \leqslant n \leqslant N$, so dass

$$|a_n|\rho^n = |f|_\rho = \max_{M\leqslant m\leqslant N} |a_m|\rho^m.$$

Das impliziert
$$\max_{M\leqslant m\leqslant N, m\neq n} |a_m|\rho^m < |a_n|\rho^n.$$
Aufgrund der Stetigkeit beider Seiten in ρ gilt diese strikte Ungleichung für alle ρ' in einer offenen Umgebung von ρ. Es folgt
$$|f|_{\rho'} = \max_m |a_m|(\rho')^m = \max_{M\leqslant m\leqslant N} |a_m|(\rho')^m = |a_n|(\rho')^n,$$
d.h. diese offene Umgebung liegt in U_n. Damit bilden die Mengen $U_M, \dots, U_N$ eine disjunkte offene Überdeckung des zusammenhängenden Intervalls (ρ_i, ρ_{i+1}). Folglich gilt $(\rho_i, \rho_{i+1}) = U_{n_i}$ für genau ein $n_i \in \mathbb{Z}$ und $U_n = \emptyset$ für alle $n \neq n_i$. $\square$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein kompaktes Intervall und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in B_I \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen mit
$$v := -\log|\cdot| : F \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
die Bewertung auf F. Für $\rho \in I \setminus \{0\}$ und $t := \log(\rho)$ gilt dann
$$\log|f|_\rho = \log|f|_{e^t} = \log\max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|e^{nt} = \max_{n\in\mathbb{Z}}(nt + \log|a_n|) = \max_{n\in\mathbb{Z}}(nt - v(a_n)).$$
Wir erhalten die Funktion
$$\begin{aligned}\psi_f : \log(I \setminus \{0\}) &\to \mathbb{R},\\ t &\mapsto \log|f|_{e^t} = \max_{n\in\mathbb{Z}}(nt - v(a_n)).\end{aligned}$$
Nach Bemerkung 2.12 ist ψ_f das Maximum endlich vieler affin-linearer Funktionen und damit stetig, konvex und stückweise linear.

Definition 2.14. Für ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in B_I \setminus \{0\}$ definieren wir für $\rho \in I \setminus \{0\}$
$$n(f, \rho) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid |f|_\rho = |a_n|\rho^n\}$$
und
$$N(f, \rho) := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid |f|_\rho = |a_n|\rho^n\}.$$
Im Fall $0 \in I$ setzen wir $n(f, 0) := 0$ und $N(f, 0) := \min\{n \geqslant 0 | a_n \neq 0\}$.

Lemma 2.15. *Sei $I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und fixiere $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n t^n \in B_I \setminus \{0\}$. Seien $\rho_1, \dots, \rho_k$ die kritischen Radien von f in (σ, τ) und sei $\rho \in I \setminus \{0\}$. Dann ist die linksseitige (bzw. rechtsseitige) Steigung von ψ_f bei $\log\rho$ gegeben durch $n(f, \rho)$ (bzw. $N(f, \rho)$).*

Insbesondere ändert sich die Steigung von ψ_f genau an den Stellen $\log\rho_1, \dots, \log\rho_k$, und für $\sigma \leqslant \rho < \rho' \leqslant \tau$ gilt
$$N(f, \rho) \leqslant n(f, \rho').$$

Beweis. Wie zuvor setzen wir $\rho_0 := \sigma$ sowie $\rho_{k+1} := \tau$. Ist $0 \leqslant i \leqslant k$ und $\rho \in I$ mit $\rho_i < \rho < \rho_{i+1}$, so gibt es nach Lemma 2.13 genau ein $n_i \in \mathbb{Z}$ mit $|f|_\rho = |a_{n_i}|\rho^{n_i}$. Setzen wir $t := \log(\rho)$, so ist
$$\psi_f(t) = n_i t - v(a_{n_i})$$
in (ρ_i, ρ_{i+1}) linear mit Steigung $n_i = n(f, \rho) = N(f, \rho)$.

Für beliebiges $\rho \in I \setminus \{0\}$ sei $J := \{n \in \mathbb{Z} : |f|_\rho = |a_n|\rho^n\}$, sodass
$$\max_{n\notin J} |a_n|\rho^n < |f|_\rho.$$

Wegen der Stetigkeit beider Seiten in ρ gilt das in einer offenen Umgebung U von ρ in $I \setminus \{0\}$ und dort also

$$|f|_{\rho'} = \max_{n \in J} |a_n|(\rho')^n$$

für alle $\rho' \in U$ bzw.

$$\psi_f(t') = \max_{n \in J}(nt' - v(a_n))$$

für alle $t' = \log(\rho') \in \log(U)$. An der Stelle $t = \log(\rho)$ haben all diese affinen Funktionen $nt - v(a_n)$ für $n \in J$ denselben Wert. Für $t' \geqslant t$ dominiert dann diejenige mit der größten Steigung, d.h.

$$\psi_f(t') = N(f, \rho)t' - v(a_{N(f,\rho)})$$

für $t' \geqslant t$ nahe bei t. Analog dominiert für $t' \leqslant t$ nahe t diejenige mit der kleinsten Steigung, d.h.

$$\psi_f(t') = n(f, \rho)t' - v(a_{n(f,\rho)})$$

für $t' \leqslant t$ nahe t. Somit ändert sich die Steigung von ψ_f genau an den Stellen $\rho \in I$ mit $n(f, \rho) \neq N(f, \rho)$. Das sind genau die Stellen $\log \rho_1, \ldots, \log \rho_k$. Ferner impliziert die Konvexität von ψ_f dann die Ungleichung

$$N(f, \rho) \leqslant n(f, \rho')$$

für alle $\sigma \leqslant \rho < \rho' \leqslant \tau$ mit $\rho > 0$. Im Fall $\rho = 0$ ist sie offensichtlich. □

Lemma 2.16. *Sei $\rho \geqslant 0$ und seien $f, g \in B_\rho \setminus \{0\}$. Dann gilt*

$$n(fg, \rho) = n(f, \rho) + n(g, \rho) \quad \textit{und} \quad N(fg, \rho) = N(f, \rho) + N(g, \rho).$$

Beweis. Der Fall $\rho = 0$ ist klar. Sei also ohne Einschränkung $\rho > 0$.
Wir schreiben $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$, $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n t^n$, $fg = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t^n$, setzen wie im Beweis von Lemma 2.6 $k_0 := n(f, \rho)$, $l_0 := n(g, \rho)$, $n_0 := k_0 + l_0$ und zeigen $|fg|_\rho = |c_{n_0}|\rho^{n_0}$. Es folgt dann $n(fg, \rho) \leqslant n_0$. Angenommen, es gibt $n < n_0$ mit $|c_n|\rho^n = |fg|_\rho$. Sind dann $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k + l = n$, so gilt $k < k_0$ oder $l < l_0$ und damit aufgrund der Minimalität von k_0, l_0

$$|a_k|\rho^k < |f|_\rho \quad \text{oder} \quad |b_l|\rho^l < |g|_\rho.$$

In beiden Fällen folgt

$$|c_n|\rho^n = |fg|_\rho = |f|_\rho \cdot |g|_\rho > |a_k|\rho^k |b_l|\rho^l = |a_k b_l|\rho^n$$

und somit $|c_n| > |a_k b_l|$. Die strikte Dreiecksungleichung zeigt andererseits

$$|c_n| = |\sum_{k+l=n} a_k b_l| \leqslant \max_{k+l=n} |a_k b_l|.$$

Das ist ein Widerspruch, sodass $n_0 = n(fg, \rho)$ gilt.
Analog kann man im Beweis von Lemma 2.6 $k_0 := N(f, \rho)$, $l_0 := N(g, \rho)$ sowie $n_0 := k_0 + l_0$ setzen und $|fg|_\rho = |c_{n_0}|\rho^{n_0}$ zeigen, woraus $N(fg, \rho) \geqslant n_0$ folgt. Man nimmt an, es gäbe $n > n_0$ mit $|fg|_\rho = |c_n|\rho^n$ und führt diese Annahme mit derselben Rechnung wie oben zu einem Widerspruch. □

Definition 2.17. Sei $\rho \geqslant 0$ und sei $P \in F[t] \setminus \{0\}$ ein Polynom.

(i) P heißt *ρ-dominant*, falls $N(P, \rho) = \deg(P)$ gilt.

(ii) P heißt *ρ-extremal*, falls $N(P,\rho) = \deg(P)$ und $n(P,\rho) = 0$ gilt.

Lemma 2.18. *Sei $\rho > 0$ und sei $P \in F[t] \setminus \{0\}$ ein Polynom. Es sind jeweils äquivalent:*

(i) *(a) P ist ρ-dominant.*

(b) Für jede Nullstelle $x \in \overline{F}$ von P gilt $|x| \leqslant \rho$.

(ii) *(a) P ist ρ-extremal.*

(b) Für jede Nullstelle $x \in \overline{F}$ von P gilt $|x| = \rho$.

Beweis. Im Fall $\rho = 0$ sind die Begriffe ρ-dominant und ρ-extremal äquivalent. Ein 0-extremales Polynom ist von der Form $P(t) = at^d$ mit $d \geqslant 0$ und $a \in F^\times$. Die Aussage ist daher klar und wir können ohne Einschränkung $\rho > 0$ annehmen.

Sei $d := \deg(P)$. Wir schreiben $P(t) = \sum_{n=0}^d b_n t^n = b_d \prod_{i=1}^d (t - x_i)$ mit $b_1, \dots, b_d \in F$, wobei $x_1, \dots, x_d \in \overline{F}$ die Nullstellen von P sind. Für jedes $1 \leqslant j \leqslant d$ ist

$$b_j = (-1)^{d-j} b_d \sum_{i_1 < \dots < i_{d-j}} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{d-j}}$$

und insbesondere $b_0 = (-1)^d b_d x_1 \cdot \ldots \cdot x_d$. Gilt nun $|x_i| \leqslant \rho$ für alle $1 \leqslant i \leqslant d$, so erhalten wir

$$|b_j| \leqslant |b_d| \max_{i_1 < \dots < i_{d-j}} |x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{d-j}}| \leqslant |b_d| \rho^{d-j}$$

und damit $|b_j|\rho^j \leqslant |b_d|\rho^d$ für alle $1 \leqslant j \leqslant d$ und es folgt $N(P,\rho) = d$. Gilt für alle $1 \leqslant i \leqslant d$ sogar $|x_i| = \rho$, so folgt $|b_0| = |b_d|\rho^d$ und damit zusätzlich $n(P,\rho) = 0$. Das beweist $(b) \Rightarrow (a)$ in beiden Fällen.

Sei nun umgekehrt P ρ-dominant (bzw. ρ-extremal). Sind $P_1, P_2 \in \overline{F}[t] \setminus \{0\}$ mit $P = P_1 \cdot P_2$, so sind nach Lemma 2.16 auch P_1 und P_2 ρ-dominant (bzw. ρ-extremal). Wir können also ohne Einschränkung $\deg(P) = 1$ annehmen, d.h. $P = b_0 + b_1 t$ mit $b_0, b_1 \in F$, $b_1 \neq 0$, und $x_1 = -\frac{b_0}{b_1} \in F$ ist die einzige Nullstelle von P. Dann gilt

$$|b_0|\rho^0 = |b_0| = |b_1||x_1| \leqslant |b_1|\rho^1$$

und in dem Fall, dass P ρ-extremal ist, gilt Gleichheit. □

2.2 Divisionssätze und der Vorbereitungssatz

Wir sind nun soweit, den Weierstraßschen Divisionssatz zu beweisen. Wir beweisen zunächst einen Divisionssatz für Potenzreihen in B_ρ (Satz 2.19) und verallgemeinern diese Aussage dann auf beliebige Reihen in B_I für ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ (Satz 2.21).

Satz 2.19 (1. Divisionssatz)**.** *Sei $\rho > 0$, seien $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n \in B_\rho$ eine Potenzreihe und $P = \sum_{n=0}^d b_n t^n \in F[t]$ ein ρ-dominantes Polynom vom Grad $d > 0$.*
Dann existieren eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $g \in B_\rho$ und ein eindeutig bestimmtes Polynom $Q \in F[t]$ vom Grad $< d$, so dass

$$f = P \cdot g + Q.$$

Darüber hinaus gilt

$$|f|_\rho = \max(|Q|_\rho, |P|_\rho \cdot |g|_\rho).$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $f = Pg_1 + Q_1 = Pg_2 + Q_2$ zwei Zerlegungen. Es gilt also

$$P(g_1 - g_2) = Q_2 - Q_1.$$

Ist $g_1 = g_2$, so folgt $Q_1 = Q_2$. Im Fall $g_1 \neq g_2$ folgt aus Lemma 2.16

$$\begin{aligned} d > \deg(Q_2 - Q_1) \geqslant N(Q_2 - Q_1, \rho) &= N(P(g_1 - g_2), \rho) \\ &= N(P, \rho) + N(g_1 - g_2, \rho) \\ &= d + N(g_1 - g_2, \rho) \\ &\geqslant d, \end{aligned}$$

da die Potenzreihe $g_1 - g_2$ natürlich $N(g_1 - g_2, \rho) \geqslant 0$ erfüllt. Das ist ein Widerspruch, also gilt $g_1 = g_2$ und damit auch $Q_1 = Q_2$.

Existenz: Sei zunächst f ein Polynom vom Grad h. Wir beweisen die Existenz per Induktion nach h und behaupten in diesem Fall zusätzlich, dass g als Polynom gewählt werden kann. Ist $h < d$, so setzen wir $g = 0$ und $Q := f$. Sei also $h \geqslant d$. Wir setzen $g_0 := a_h b_d^{-1} t^{h-d} \in F[t]$. Dann ist $f_0 := f - Pg_0$ ein Polynom vom Grad $\deg(f_0) < h$. Nach der Induktionsannahme existieren eindeutig bestimmte Polynome $g_1, Q \in F[t]$ mit $\deg(Q) < d$, so dass

$$f_0 = P \cdot g_1 + Q \quad \text{und} \quad |f_0|_\rho = \max(|Q|_\rho, |P|_\rho \cdot |g_1|_\rho).$$

Setzen wir nun $g := g_0 + g_1$, so gilt $f = P \cdot g + Q$ und

$$\begin{aligned} \max(|Q|_\rho, |P|_\rho \cdot |g|_\rho) &\leqslant \max(|Q|_\rho, |P|_\rho \cdot |g_0|_\rho, |P|_\rho \cdot |g_1|_\rho) \\ &= \max(|f_0|_\rho, |P|_\rho \cdot |g_0|_\rho) \\ &\leqslant \max(|f|_\rho, |P|_\rho \cdot |g_0|_\rho) \\ &= \max(|f|_\rho, |b_d|\rho^d \cdot |a_h b_d^{-1}|\rho^{h-d}) \\ &= \max(|f|_\rho, |a_h|\rho^h) \\ &= |f|_\rho. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus der strikten Dreiecksungleichung und der Multiplikativität von $|\cdot|_\rho$.

Sei nun $f = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n \in B_\rho$ eine beliebige Potenzreihe. Fixiere $n \geqslant 0$. Wenden wir das bisher Gezeigte auf das Polynom $a_n t^n \in F[t]$ an, so erhalten wir Polynome $g_n, Q_n \in F[t]$ mit $\deg(Q_n) < d$, so dass

$$a_n t^n = P \cdot g_n + Q_n \quad \text{und} \quad |a_n|\rho^n = \max(|Q_n|_\rho, |P|_\rho \cdot |g_n|_\rho).$$

Dies zeigt, dass

$$g := \sum_{n \geqslant 0} g_n \quad \text{und} \quad Q := \sum_{n \geqslant 0} Q_n$$

bezüglich $|\cdot|_\rho$ konvergente Reihen sind und die Behauptung erfüllen. Beachte, dass der F-Vektorraum aller Polynome vom Grad $< d$ endlichdimensional und daher bezüglich $|\cdot|_\rho$ vollständig ist. Ebenso ist $B_\rho \cap F[[t]] = B_{[0,\rho]}$ vollständig bezüglich $|\cdot|_\rho$. □

Bemerkung 2.20. Satz 2.19 ist auch im Fall $\rho = 0$ wahr. Dann gilt nämlich $P(t) = b_d t^d$ und die Zerlegung ist einfach gegeben durch

$$f = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n = b_d t^d \cdot \sum_{n \geqslant d} b_d^{-1} a_n t^{n-d} + \sum_{n=0}^{d-1} a_n t^n.$$

Satz 2.21 (2. Divisionssatz). *Sei $I = [\sigma, \tau] \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein kompaktes Intervall. Sei $\rho \in I \setminus \{0\}$, $f \in B_I$, und sei P ein ρ-extremales Polynom vom Grad $d > 0$.*
Dann existieren eindeutig bestimmte Elemente $g \in B_I$ und $Q \in F[t]$ vom Grad $< d$, so dass

$$f = P \cdot g + Q.$$

Außerdem gilt

$$|f|_\rho = \max(|Q|_\rho, |P|_\rho \cdot |g|_\rho).$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $f = Pg_1 + Q_1 = Pg_2 + Q_2$ zwei Zerlegungen. Es gilt also $P(g_1 - g_2) = Q_2 - Q_1$. Ist $Q_1 = Q_2$, so folgt $P(g_1 - g_2) = 0$ und damit $g_1 = g_2$ im Integritätsbereich B_I. Sei nun $Q_1 \neq Q_2$ (und damit auch $g_1 \neq g_2$). Dann erhalten wir ähnlich wie im Eindeutigkeitsbeweis des ersten Divisionssatzes unter Benutzung von Lemma 2.16 den folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} d > \deg(Q_2 - Q_1) &\geqslant N(Q_2 - Q_1, \rho) - n(Q_2 - Q_1, \rho) \\ &= N(P(g_1 - g_2), \rho) - n(P(g_1 - g_2), \rho) \\ &= N(P, \rho) - n(P, \rho) + \underbrace{N(g_1 - g_2, \rho) - n(g_1 - g_2, \rho)}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant N(P, \rho) - n(P, \rho) \\ &= d. \end{aligned}$$

Existenz: Wir würden gerne den ersten Divisionssatz anwenden. Im Fall $0 \in I$ ist das wegen $B_I \subseteq F[[t]]$ direkt möglich. Im allgemeinen Fall schreiben wir $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n = f^- + f^+$ mit

$$f^- = \sum_{n<0} a_n t^n \quad \text{und} \quad f^+ = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n.$$

Für jedes $\mu \in I$ ist $f^\pm \in B_\mu$ mit $|f|_\mu = \max(|f^+|_\mu, |f^-|_\mu)$. Sei zunächst $\mu \in [\rho, \tau]$ beliebig. Wegen Lemma 2.18 ist P μ-dominant. Wir können also den ersten Divisionssatz 2.19 auf die Potenzreihe $f^+ \in B_I \subset B_\mu$ anwenden und erhalten eine Potenzreihe $g^+ \in B_\mu$ sowie ein Polynom $Q^+ \in F[t]$ mit $\deg(Q) < d$, so dass

$$f^+ = P \cdot g^+ + Q^+ \quad \text{und} \quad |f^+|_\mu = \max(|Q^+|_\mu, |P|_\mu \cdot |g^+|_\mu).$$

Da g^+ eine Potenzreihe ist, gilt sogar $g^+ \in B_{[\sigma,\mu]}$. Aus der Eindeutigkeitsaussage im ersten Divisionssatz folgt dann, dass g^+ und Q^+ nicht von μ abhängen. Insbesondere ist $g^+ \in B_I$ mit

$$|f^+|_\rho = \max(|Q^+|_\rho, |P|_\rho \cdot |g^+|_\rho).$$

Im Fall $\sigma = 0$ gilt $f = f^+$ und wir sind fertig. Wir nehmen also $\sigma \neq 0$ an und betrachten die Potenzreihe $f_1^- := t^{d-1} f^-(t^{-1}) \in B_{[\tau^{-1}, \sigma^{-1}]}$ und das Polynom $P_1 := t^d P(t^{-1}) \in F[t]$. Da P ρ-extremal ist, gilt $P(0) \neq 0$. Damit sind die Nullstellen von P_1 genau die Inversen der Nullstellen von P. Ist $x \in \overline{F}$ eine Nullstelle von P, so ist also x^{-1} eine Nullstelle von P_1, und sie erfüllt damit $|x^{-1}| = |x|^{-1} = \rho^{-1} \leqslant \mu$ für alle $\mu \in [\rho^{-1}, \sigma^{-1}]$. Nach Lemma 2.18 ist P_1 μ-dominant für jedes $\mu \in [\rho^{-1}, \sigma^{-1}]$. Analog zur Betrachtung von f^+ erhalten wir mithilfe des ersten Divisionssatzes eine Potenzreihe $g_1^- \in B_{[\tau^{-1}, \sigma^{-1}]}$ und ein Polynom $Q_1^- \in F[t]$ mit $\deg(Q_1^-) < d$, so dass

$$f_1^- = P_1 \cdot g_1^- + Q_1^-.$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \rho^{1-d} |f^-|_\rho = |f_1^-|_{\rho^{-1}} &= \max(|Q_1^-|_{\rho^{-1}}, |P_1|_{\rho^{-1}} \cdot |g_1^-|_{\rho^{-1}}) \\ &= \max(|Q_1^-|_{\rho^{-1}}, \rho^{-d} |P|_\rho \cdot |g_1^-|_{\rho^{-1}}). \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit sieht man wie folgt. Es gilt

$$f_1^- = t^{d-1} f^-(t^{-1}) = t^{d-1} \sum_{n<0} a_n t^{-n} = \sum_{n<0} a_n t^{d-1-n}$$

und daher

$$|f_1^-|_{\rho^{-1}} = \sup_{n<0} |a_n| \rho^{-(d-1-n)} = \rho^{1-d} \sup_{n<0} |a_n| \rho^n = \rho^{1-d} |f^-|_\rho.$$

Analog sieht man auch $|P_1|_{\rho^{-1}} = \rho^{-d} |P|_\rho$.
Nun ist $Q^- := t^{d-1} Q_1^-(t^{-1}) \in F[t]$ ein Polynom vom Grad $< d$, und wie eben sieht man $|Q^-|_\rho = \rho^{d-1} \cdot |Q_1^-|_{\rho^{-1}}$. Weiter definieren wir $g^- := t^{-1} g_1^-(t^{-1})$ und sehen $|g^-|_\mu = \mu^{-1} |g_1^-|_{\mu^{-1}}$ für alle $\mu \in [\sigma, \tau]$, sodass wir $g^- \in B_I$ erhalten. Insbesondere haben wir

$$\begin{aligned}
|f^-|_\rho = \rho^{d-1} |f_1|_{\rho^{-1}} &= \rho^{d-1} \max(|Q_1^-|_{\rho^{-1}}, \rho^{-d} |P|_\rho \cdot |g_1^-|_{\rho^{-1}}) \\
&= \rho^{d-1} \max(\rho^{1-d} |Q^-|_\rho, \rho^{-d} |P|_\rho \cdot \rho \cdot |g^-|_\rho) \\
&= \rho^{d-1} \max(\rho^{1-d} |Q^-|_\rho, \rho^{1-d} |P|_\rho \cdot |g^-|_\rho) \\
&= \max(|Q^-|_\rho, |P|_\rho \cdot |g^-|_\rho).
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f^- = t^{d-1} f_1^-(t^{-1}) &= t^{d-1}(P_1(t^{-1}) g_1(t^{-1}) + Q_1^-(t^{-1})) \\
&= t^{d-1}(t^{-d} P(t) \cdot t g^-(t) + t^{1-d} Q^-(t)) \\
&= P \cdot g^- + Q^-.
\end{aligned}$$

Schließlich setzen wir $g := g^- + g^+ \in B_I$ und $Q := Q^- + Q^+ \in F[t]$. Dann ist $\deg(Q) < d$ und es gilt

$$f = P \cdot g + Q$$

sowie

$$\begin{aligned}
|f|_\rho &= \max(|f^+|_\rho, |f^-|_\rho) \\
&= \max(|Q^+|_\rho, |P|_\rho \cdot |g^+|_\rho, |Q^-|_\rho, |P|_\rho \cdot |g^-|_\rho) \\
&\geqslant \max(|Q|_\rho, |P|_\rho \cdot |g|_\rho).
\end{aligned}$$

Aufgrund der strikten Dreiecksungleichung und der Multiplikativität von $|\cdot|_\rho$ gilt auch die umgekehrte Ungleichung. Das beendet den Beweis. □

Der zweite Teil des folgenden Satzes heißt der *Weierstraßsche Vorbereitungssatz*. Er besagt, dass sich jedes Element in B_I für ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ schreiben lässt als das Produkt eines Polynoms und einer Einheit in B_I. Daraus werden wir in Korollar 2.23 folgern, dass in diesem Fall der Ring B_I ein Hauptidealring ist.

Satz 2.22. *Sei $I = [\sigma, \tau] \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein kompaktes Intervall. Sei $f \in B_I \setminus \{0\}$. Dann gilt*

(i) $f \in B_I^\times$ genau dann, wenn $n(f, \sigma) = N(f, \tau)$. Im Fall $\sigma = 0$ (d.h. $B_I \subseteq F[[t]]$) bedeutet das $N(f, \tau) = 0$.

(ii) Es existiert ein Polynom $P \in F[t]$ vom Grad $N(f, \tau) - n(f, \sigma)$ sowie eine Einheit $u \in B_I^\times$ mit $f = P \cdot u$. Dabei gilt:

(a) P und u sind bis auf Multiplikation mit Elementen aus $F^\times$ eindeutig bestimmt.

(b) Für jede Nullstelle $x \in \overline{F}$ von P gilt $\sigma \leqslant |x| \leqslant \tau$.

Beweis. (i): Zuerst sei $f \in B_I^\times$ eine Einheit. Aus der Konvexität der Funktion ψ_f folgt $n(f,\sigma) \leqslant N(f,\tau)$. Die gewünschte Gleichheit ergibt sich dann mithilfe von Lemma 2.16. Ist nämlich $g \in B_I$ mit $fg = 1$ in B_I, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= n(1,\sigma) = n(fg,\sigma) = n(f,\sigma) + n(g,\sigma), \\ 0 &= N(1,\tau) = N(fg,\tau) = N(f,\tau) + N(g,\tau) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &0 \leqslant N(f,\tau) - n(f,\sigma) = n(g,\sigma) - N(g,\tau) \\ \Leftrightarrow\ &N(g,\tau) \leqslant n(g,\sigma). \end{aligned}$$

Wieder aufgrund der Konvexität von ψ_g gilt aber $N(g,\tau) \geqslant n(g,\sigma)$. Damit gilt auch $n(f,\sigma) = N(f,\tau)$.
Umgekehrt gelte nun $N(f,\tau) = n(f,\sigma) =: m$. Wir schreiben $f = at^m(1-g)$ mit $a \in F^\times$ und $g = \sum_{n\neq 0} b_n t^n \in B_I$. Offensichtlich ist $at^m \in B_I^\times$. Es genügt also, $1-g \in B_I^\times$ zu zeigen. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} m &= n(f,\sigma) = n(at^m,\sigma) + n(1-g,\sigma) = m + n(1-g,\sigma), \\ m &= N(f,\tau) = N(at^m,\tau) + N(1-g,\tau) = m + N(1-g,\tau). \end{aligned}$$

Also ist $n(1-g,\sigma) = N(1-g,\tau) = 0$. Aus der Konvexität von ψ_{1-g} folgt dann

$$0 = n(1-g,\sigma) \leqslant N(1-g,\sigma) \leqslant n(1-g,\tau) \leqslant N(1-g,\tau) = 0,$$

d.h. alle Werte sind Null. Wegen $1-g = 1 + \sum_{n\neq 0} b_n t^n$ bedeutet das im Fall $\sigma > 0$ $|g|_\sigma = \max_{n\neq 0} |b_n|\sigma^n < 1$, denn gäbe es $n \neq 0$ mit $|b_n|\sigma^n \geqslant 1$, so wäre im Fall $n < 0$ (bzw. $n > 0$) der Wert $n(1-g,\sigma) < 0$ (bzw. $N(1-g,\sigma) > 0$). Offenbar gilt im Fall $\sigma = 0$ ebenfalls $|g|_0 < 1$. Analog zeigt man, dass stets $|g|_\tau < 1$ gilt.
Es folgt $|g|_I < 1$. Wir behaupten, dass die Folge $(s_m)_{m\geqslant 0}$ definiert durch $s_m := \sum_{n=0}^m g^n$ in B_I konvergiert und invers zu $1-g$ ist. Zu gegebenem $\rho \in I$ und $\varepsilon > 0$ sei $N \geqslant \frac{\log\varepsilon}{\log|g|_\rho}$. Dann gilt für alle $m \geqslant N$

$$|s_m - s_N|_\rho = |\sum_{n=N+1}^m g^n|_\rho \leqslant \max_{N+1\leqslant n\leqslant m} |g|_\rho^n \leqslant |g|_\rho^{N+1} < \varepsilon.$$

Damit ist die Folge $(s_m)_{m\geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in B_I und daher konvergent, da B_I nach Lemma 2.6 (ii) bezüglich $|\cdot|_I$ vollständig ist. Außerdem gilt für $\rho \in I$ und $m \geqslant N$

$$|(1-g)\sum_{n=0}^m g^n - 1|_\rho = |g^{m+1}|_\rho = |g|_\rho^{m+1} < \varepsilon.$$

(ii): Im Fall $\tau = 0$ ist die Aussage eine elementare Eigenschaft des diskreten Bewertungsrings $B_0 = F[[t]]$. Sei also $\tau > 0$. Wir führen Induktion nach $d := N(f,\tau) - n(f,\sigma) \geqslant 0$. Der Induktionsanfang wurde im Beweis der ersten Aussage gezeigt. Sei also $d > 0$. Dann existiert ein $\rho \in I$ mit

$$0 < h := N(f,\rho) - n(f,\rho) \leqslant d,$$

wobei die letzte Ungleichung wieder aus der Konvexitätsaussage in Lemma 2.15 folgt. Angenommen nämlich wir hätten $N(f,\rho) = n(f,\rho)$ für alle $\rho \in I$. Im Fall $\sigma > 0$ würde Lemma 2.15 direkt

$$n(f,\sigma) = N(f,\sigma) = n(f,\tau) = N(f,\tau)$$

liefern und damit $d = 0$ - ein Widerspruch. Im Fall $\sigma = 0$ liefert dasselbe Argument mit Hilfe von (i) für jedes $\tau \geqslant \varepsilon > 0$ ein $g_\varepsilon \in B_{[\varepsilon,\tau]}$ mit $f \cdot g_\varepsilon = 1$. Die Eindeutigkeit der Inversen zeigt dann, dass $g_\tau = g_\varepsilon$ in $B_{[\varepsilon,\tau]} \subseteq B_\tau$, d.h. $g := g_\tau$ ist ε-konvergent für alle $0 < \varepsilon \leqslant \tau$. Wegen $N(f,0) = n(f,0)$ gilt aber $f \in F[[t]]^\times$ und wir erhalten $n(f,\varepsilon) = 0$ bei Wahl eines hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Die Konstruktion in (i) zeigt dann $g \in F[[t]] = B_0$, d.h. $g \in B_{[0,\tau]} = B_I$ und $f \in B_I^\times$. Nach (i) liefert das erneut den Widerspruch $d = 0$.

Zwischenbehauptung: Es existieren $g \in B_I$ sowie ein ρ-extremales Polynom $P \in F[t]$ vom Grad h mit $f = P \cdot g$ in B_I.

Beweis der Zwischenbehauptung: Im Fall $\rho = 0$ ist das klar: Es gilt dann $f = \sum_{n \geqslant h} a_n t^n$ und wir setzen $P(t) = t^h$ und $g(t) = \sum_{n=0}^\infty a_{n+h} t^n$. Offenbar ist g nach wie vor I-konvergent, und wir nehmen ab sofort $\rho > 0$ an.

Wir arbeiten zunächst in B_ρ und setzen $f' := t^{-n(f,\rho)} f$, sodass $n(f',\rho) = 0$ und $N(f',\rho) = h$ gilt. Wir konstruieren nun induktiv eine Folge von Polynomen $(P_m)_{m \geqslant 0}$ mit

$$\deg(P_m) = h \text{ und } |f' - P_m|_\rho < |f'|_\rho.$$

Aufgrund der Annahmen bezüglich $n(f',\rho)$ und $N(f',\rho)$ folgt aus diesen Bedingungen

$$P_m \text{ ist } \rho\text{-extremal mit } |f'|_\rho = |P_m|_\rho :$$

Schreiben wir $P_m = \sum_{n=0}^h b_n t^n$ und $f' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$, so gilt

$$|f'|_\rho = |a_0| = |a_h| \rho^h.$$

Angenommen, es gilt $n(P_m,\rho) > 0$. Es folgt

$$|b_0| < \max_{0 \leqslant n \leqslant h} |b_n| \rho^n = |P_m|_\rho = |f'|_\rho = |a_0|,$$

also

$$|a_0 - b_0| = \max(|a_0|, |b_0|) = |a_0| = |f'|_\rho$$

und damit letztendlich

$$|f' - P_m|_\rho = \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n - b_n| \rho^n \geqslant |a_0 - b_0| = |f'|_\rho,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung an P_m. Genauso führt die Annahme $N(P_m,\rho) < h$ zu einem Widerspruch.

Wir setzen $P_1 := \sum_{n=0}^h a_n t^n$. Dann ist $\deg(P_1) = h$ und $|f' - P_1|_\rho < |f'|_\rho$. Induktiv nehmen wir an, dass $P_1, \ldots, P_m$ wie gewünscht konstruiert sind. Durch Anwendung des zweiten Divisionssatzes 2.21 erhalten wir $g_m \in B_I$ sowie ein Polynom $Q_m \in F[t]$ vom Grad $< h$ mit

$$f' = P_m \cdot g_m + Q_m.$$

Also hat $P_{m+1} := P_m + Q_m$ ebenfalls Grad h. Durch Anwendung der Eindeutigkeitssaussage im zweiten Divisionssatz auf die Identität

$$f' - P_m = P_m(g_m - 1) + Q_m$$

erhalten wir ferner

$$|f' - P_m|_\rho = \max(|Q_m|_\rho, |P_m|_\rho \cdot |g_m - 1|_\rho).$$

Also ist

$$|f' - P_{m+1}|_\rho \leqslant \max(|f' - P_m|_\rho, |Q_m|_\rho) = |f' - P_m|_\rho < |f'|_\rho.$$

Induktiv ergibt sich für jedes $m \geqslant 1$

$$|f' - P_m|_\rho \leqslant |f' - P_1|_\rho$$

und

$$|g_m - 1|_\rho \cdot |f'|_\rho = |g_m - 1|_\rho \cdot |P_m|_\rho \leqslant |f' - P_m|_\rho \leqslant |f - P_1|_\rho < |f'|_\rho,$$

also

$$|g_m - 1|_\rho \leqslant \frac{|f' - P_1|_\rho}{|f'|_\rho} < 1.$$

Ebenso können wir die Eindeutigkeitsaussage im zweiten Divisionssatz auf die Identität

$$Q_m(g_{m+1} - 1) = P_m(g_m - g_{m+1}) - Q_{m+1}$$

anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} |Q_m|_\rho \cdot \frac{|f' - P_1|_\rho}{|f'|_\rho} &\geqslant |Q_m|_\rho \cdot |g_{m+1} - 1|_\rho \\ &= \max(|Q_{m+1}|_\rho, |P_m|_\rho \cdot |g_m - g_{m+1}|_\rho) \\ &= \max(|Q_{m+1}|_\rho, |f'|_\rho \cdot |g_m - g_{m+1}|_\rho). \end{aligned}$$

Induktiv folgt daraus

$$|Q_m|_\rho \leqslant |Q_1|_\rho \cdot (\frac{|f' - P_1|_\rho}{|f'|_\rho})^{m-1}$$

und wegen $|Q_1|_\rho \leqslant |f' - P_1|_\rho$ auch

$$|g_m - g_{m+1}|_\rho \leqslant (\frac{|f' - P_1|_\rho}{|f'|_\rho})^{m+1}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Die erste Ungleichung besagt, dass die Folge $(Q_m)_{m\geqslant 0}$ eine Nullfolge bezüglich $|\cdot|_\rho$ ist. Also konvergiert die Folge $(P_m)_{m\geqslant 0}$ bezüglich $|\cdot|_\rho$ gegen ein Polynom $P \in F[t] \setminus \{0\}$ vom Grad h. Angenommen, es gilt $n(P, \rho) > 0$. Wegen $\lim_{m\to\infty} P_m = P \neq 0$ in B_ρ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $M \in \mathbb{N}$ ein $m \geqslant M$ existiert mit $|P_m|_\rho \geqslant \varepsilon$. Zu diesem $\varepsilon > 0$ gibt es $M_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|P - P_m|_\rho < \varepsilon$ für alle $m \geqslant M_1$. Schreiben wir $P_m = \sum_{n=0}^h b_n^{(m)} t^n$ und $P = \sum_{n=0}^h b_n t^n$, so gilt $\lim_{m\to\infty} b_n^{(m)} = b_n$ in F für jedes $0 \leqslant n \leqslant h$ und somit existiert außerdem $M_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_0^{(m)} - b_0| < |b_0|$ für alle $m \geqslant M_2$. Wir wählen zunächst $M \geqslant \max(M_1, M_2)$ und dann $m \geqslant M$ mit $|P_m|_\rho \geqslant \varepsilon$. Unter der Annahme $n(P, \rho) > 0$ folgt dann

$$|b_0^{(m)}| \leqslant \max(\underbrace{|b_0^{(m)} - b_0|}_{<|b_0|}, |b_0|) = |b_0| < |P|_\rho \leqslant \max(\underbrace{|P - P_m|_\rho}_{<\varepsilon}, \underbrace{|P_m|_\rho}_{\geqslant\varepsilon}) = |P_m|_\rho$$

im Widerspruch zur ρ-Extremalität von P_m. Analog führt man auch $N(P, \rho) < h$ zu einem Widerspruch und es folgt, dass P ρ-extremal ist.

Die zweite Ungleichung oben bedeutet, dass die Folge $(g_m)_{m\geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in B_ρ ist und damit aufgrund der Vollständigkeit von B_ρ gegen ein Element $g' \in B_\rho$ konvergiert. Aus den

Relationen $f' = P_m \cdot g_m + Q_m$ für alle m folgt im Limes die Relation $f' = P \cdot g'$ in B_ρ. Das ergibt $f = t^{n(f,\rho)} f' = P \cdot t^{n(f,\rho)} g'$ mit $t^{n(f,\rho)} g' \in B_\rho$. Nach Satz 2.21 angewandt auf I, ρ und P existieren aber andererseits $g \in B_I$, $\tilde{Q} \in F[t]$ mit $\deg(\tilde{Q}) < \deg(P) = h$ und $f = P \cdot g + \tilde{Q}$. Wegen $B_I \subseteq B_\rho$ können wir diese Gleichung in B_ρ auffassen. Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.21 (angewandt auf $\{\rho\}$ und P) liefert dann wegen $f = P \cdot g + \tilde{Q} = P \cdot t^{n(f,\rho)} g'$ die Gleichungen $\tilde{Q} = 0$ und $t^{n(f,\rho)} g' = g \in B_I$. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Nach Lemma 2.15 gilt $N(P, \rho) \leqslant n(P, \tau) \leqslant N(P, \tau)$ und $n(P, \sigma) \leqslant N(P, \sigma) \leqslant n(P, \rho)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
N(g, \tau) - n(g, \sigma) &= \underbrace{N(f, \tau) - n(f, \sigma)}_{=d} - N(P, \tau) + n(P, \sigma) \\
&\leqslant d - \underbrace{N(P, \rho)}_{=h} + \underbrace{n(P, \rho)}_{=0} \\
&= d - h \\
&< d.
\end{aligned}$$

Also können wir die Induktionsannahme auf g anwenden und erhalten so die Existenz einer Zerlegung von f, also eine Einheit $u \in B_I^\times$ sowie ein Polynom $P \in F[t]$ mit $f = P \cdot u$. Eigenschaft (b) besitzt das Polynom P nach Induktionssannahme und per Konstruktion, da das vorher konstruierte Polynom P ρ-extremal für ein $\rho \in I$ ist und daher nach Lemma 2.18 für jede Nullstelle $x \in \overline{F}$ dieses Polynoms $|x| = \rho \in I$ gilt.

Für die behauptete Eindeutigkeit seien nun $P, Q \in F[t]$, $u, v \in B_I^\times$ und

$$f = P \cdot u = Q \cdot v$$

zwei Zerlegungen wie gefordert. Sei $L|F$ ein Zerfällungskörper für das Polynom PQ. Sei $\widetilde{B}_I$ der entsprechende Ring der I-konvergenten Reihen mit Koeffizienten in L. Da $\widetilde{B}_I$ ein Integritätsbereich ist, folgt aus der Identität $Puv^{-1} = Q$ in $B_I \subseteq \widetilde{B}_I$, dass jedes $x \in \overline{F}$ mit $|x| \in I$ mit derselben Vielfachheit als Nullstelle von P wie von Q auftritt. Da diese Bedingung von allen Nullstellen erfüllt ist, ist P ein Teiler von Q in $F[t]$. Aus Gradgründen ist dann $Q = a \cdot P$ mit einem $a \in F^\times$ und folglich $v = a^{-1} u$ im Integritätsbereich B_I. □

Korollar 2.23. *Sei $I \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein kompaktes Intervall. Dann ist der Ring B_I ein Hauptidealring. Im Fall $I = \{\rho\}$ mit $\rho \notin |\overline{F}|$ ist B_I ein Körper.*

Beweis. Sei $J \subseteq B_I$ ein Ideal. Nach Satz 2.22(ii) lässt sich dann jedes $0 \neq f \in J$ schreiben als $f = P \cdot u$ mit einem Polynom $P \in F[t]$ und einer Einheit $u \in B_I^\times$. Das zeigt die nichttriviale Inklusion der Gleichheit

$$J = (J \cap F[t]) B_I.$$

Nun ist $J \cap F[t]$ ein Ideal im Hauptidealring $F[t]$, wird also von einem Polynom $Q \in F[t]$ erzeugt, d. h. $J \cap F[t] = Q \cdot F[t]$, also $J = Q \cdot B_I$, und J ist ein Hauptideal. Nach Satz 2.22(ii)(b) besitzt P im Fall $I = \{\rho\}$ mit $\rho \notin |\overline{F}|$ keine Nullstellen in $\overline{F}$, liegt also in $F^\times \subseteq B_I^\times$. Es folgt $f \in B_I^\times$ für alle $f \in B_I \setminus \{0\}$, d.h. B_I ist ein Körper. □

2.3 Die Fréchetalgebra B

Definition 2.24. Sei

$$B := B_{(0,1)} = \varprojlim_{I \subset (0,1)} B_I = \bigcap_{I \subset (0,1)} B_I.$$

der *Ring der konvergenten Laurentreihen auf der offenen punktierten Einheitskreisscheibe.* Hierbei durchläuft I die kompakten Teilintervalle von $(0,1)$.

Bemerkung 2.25. B ist eine F-Algebra, auf der wir eine Topologie haben, die von der Familie der Gaussnormen $(|\cdot|_\rho)_{0<\rho<1}$ oder äquivalent dazu von der abzählbaren Familie $(|\cdot|_{[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]})_{n\geqslant 2}$ erzeugt wird. Letztere Beschreibung der Topologie macht B zu einer F-Fréchetalgebra.

Von nun an nehmen wir zusätzlich an, dass F perfekt von positiver Charakteristik $p>0$ ist. Sei $q=p^f$ mit $f\in\mathbb{Z}_{>0}$ eine p-Potenz und $k:=\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen. Wir nehmen auch an, dass F diesen Körper enthält. Außerdem setzen wir $E:=k((t))$. Dann ist B eine E-Algebra, denn die Einschränkung des Absolutbetrags $|\cdot|$ auf k ist trivial wegen $|x|^q=|x|$ für alle $x\in k$ und daher $|k|=\{0,1\}$. Weil die Elemente in E endlichen Hauptteil haben, erhalten wir $E\subseteq B$, d.h. die gewöhnlichen Laurentreihen über k sind stets $(0,1)$-konvergent. Da F positive Charakteristik p besitzt, ist die Abbildung

$$\varphi: F\to F,\quad x\mapsto x^q,$$

ein Homomorphismus, der sogenannte *Frobeniusendomorphismus.* Er ist bijektiv, weil F perfekt ist.

Wir setzen φ wie folgt zu einem Endomorphismus auf B fort. Sei $I\subset(0,1)$ ein kompaktes Intervall und $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_nt^n\in B_I$. Wir definieren die Reihe

$$\varphi(f):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n^qt^n\in F((t,t^{-1})).$$

Für jedes $\rho\in I$ gilt dann

$$|\varphi(f)|_{\rho^q}=|\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n^qt^n|_{\rho^q}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\{|c_n^q|(\rho^q)^n\}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\{|c_n|\rho^n\}^q=|f|_\rho^q.$$

Schreiben wir $\varphi(I):=\{\rho^q|\rho\in I\}$, so gilt also $\varphi(f)\in B_{\varphi(I)}$, und die Abbildung

$$\varphi_I:(B_I,|\cdot|_I^q)\to(B_{\varphi(I)},|\cdot|_{\varphi(I)}),\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}c_nt^n\mapsto\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n^qt^n,$$

ist ein isometrischer Isomorphismus von F-Banachalgebren, wobei wir wieder die Vollkommenheit von F verwenden.

Nun bilden die kompakten Intervalle $\{\varphi(I)|I\subset(0,1)\text{ kompaktes Intervall}\}$ ebenfalls eine Überdeckung des offenen Intervalls $(0,1)$, und die von der Norm $|\cdot|_I^q$ auf B_I erzeugt Topologie ist dieselbe wie die von der Norm $|\cdot|_I$ erzeugte Topologie. Für jedes kompakte Intervall I schränkt sich φ_I daher zu einem E-linearen topologischen Isomorphismus

$$B_I\supseteq B=\bigcap_{J\subset(0,1)}B_J\xrightarrow{\varphi}\bigcap_{\varphi(J)\subset(0,1)}B_{\varphi(J)}=B\subseteq B_{\varphi(I)},$$

von F-Fréchetalgebren ein, weil φ auf $E=k((t))\subseteq B$ die Identität ist. Wir nennen diesen Isomorphismus den *Frobenius auf B.*

Wir untersuchen nun die algebraischen Eigenschaften von B. Zunächst beschreiben wir die Einheitengruppe.

Definition 2.26. Sei B wie zuvor. Die Menge

$$B^b:=\{\sum_{n\gg-\infty}c_nt^n\in F((t))\mid\sup_n|c_n|<\infty\}$$

heißt der *Unterring der beschränkten Laurentreihen.*

Bemerkung 2.27. Da die Elemente von B^b endlichen Hauptteil haben und die $(0,1)$-Konvergenz von $\sum_{n\geqslant 0} c_n t^n$ wegen $\sup_n |c_n| < \infty$ automatisch ist, ist B^b ein F-Unterraum von B. Da F nicht-archimedisch ist, folgt aus der strikten Dreiecksungleichung, dass B^b tatsächlich ein Unter*ring* von B ist.

Das folgende Lemma charakterisiert die Einheiten in B:

Lemma 2.28. *Seien B und B^b wie oben. Dann gilt*

$$B^\times = (B^b)^\times = \{\sum_{n=N}^{\infty} c_n t^n \in B \mid N \in \mathbb{Z}, c_N \neq 0, \forall n \geqslant N : |c_n| \leqslant |c_N|\}.$$

Beweis. Wegen $B^b \subseteq B$ gilt natürlich $(B^b)^\times \subseteq B^\times$.
Für die umgekehrte Inklusion sei $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B^\times$. Wir wählen $0 < \sigma < 1$ und eine Folge $(\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma < \rho_j < 1$ und $\lim_{n\to\infty} \rho_j = 1$. Dann ist $f \in B^\times_{[\sigma,\rho_j]}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.22(i) gilt dann

$$n(f,\sigma) = N(f,\rho_j)$$

für alle j. Wir erinnern daran, dass für $I = [\sigma, \rho_j]$ die Funktion

$$\psi_f : \log(I) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \log |f|_{e^t} = \max_{n\in\mathbb{Z}}(nt - v(c_n)),$$

stetig, konvex und stückweise linear ist, und dass $N(f,\sigma)$ die rechtsseitige Steigung von ψ_f bei $\log\sigma$ sowie $n(f,\rho_j)$ die linksseitige Steigung von ψ_f bei $\log\rho_j$ ist. Hier bezeichnet $v := \log|\cdot| : F \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ die Bewertung auf F. Wegen $\sigma < \rho_j$ impliziert die Konvexität für alle j

$$N(f,\sigma) \leqslant n(f,\rho_j).$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben

$$N(f,\rho_j) = n(f,\sigma) \leqslant N(,\sigma) \leqslant n(f,\rho_j) \leqslant N(f,\rho_j),$$

d.h. es gilt Gleichheit, und wir bezeichnen diese ganze Zahl mit n_0.
Für beliebiges $\rho \in [\sigma, 1)$ wählen wir $j \in \mathbb{N}$ mit $\rho < \rho_j$ und erhalten unter zweifacher Anwendung der Konvexität von ψ_f

$$n_0 = N(f,\sigma) \leqslant n(f,\rho) \leqslant N(f,\rho) \leqslant n(f,\rho_j) = n_0,$$

d.h. es gilt $n(f,\rho) = N(f,\rho)$. Das bedeutet gerade, dass $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|\rho^n$ nur für $n = n_0$ angenommen wird, d.h.

$$|c_n|\rho^n < |c_{n_0}|\rho^{n_0}$$

für alle $n \neq n_0$ und alle $\rho \in [\sigma, 1)$, da ρ beliebig war. Mit $\rho \to 1$ folgt im Limes

$$|c_n| \leqslant |c_{n_0}|$$

für alle $n \neq n_0$. Weil außerdem $\sigma \in (0,1)$ beliebig war, gilt sogar für alle $0 < \rho < 1$

$$|c_n|\rho^n < |c_{n_0}|\rho^{n_0}.$$

Wir behaupten, dass schon $c_n = 0$ für $n < n_0$ gelten muss. Wäre nämlich $n < n_0$ mit $c_n \neq 0$, so schreiben wir obige Ungleichung um zu

$$|c_n|\rho^{n-n_0} < |c_{n_0}|.$$

Die linke Seite wird für $\rho \searrow 0$ aber beliebig groß, ein Widerspruch. Insgesamt folgt somit $f \in B^b$. Indem wir dasselbe Argument auf $f^{-1} \in B^\times$ anwenden, erhalten wir auch $f^{-1} \in B^b$ und daher $f \in (B^b)^\times$. Außerdem haben wir $f = \sum_{n=n_0}^\infty c_n t^n$, d.h. wir haben auch die rechte Inklusion " $\subseteq$ " gezeigt.

Für die verbleibende Inklusion sei $f = \sum_{n=N}^\infty c_n t_n \in B$ mit $c_N \neq 0$ und $|c_n| \leqslant |c_N|$ für alle $n \geqslant N$. Offenbar ist f dann beschränkt, d.h. $f \in B^b$. Wegen $c_N t^{-N} \in B^\times$ genügt es, $c_N^{-1} t^N f \in B^\times$ zu zeigen, denn dann ist $f = c_N t^{-N} c_N^{-1} t^N f \in B^\times$. Mit anderen Worten reicht es zu zeigen, dass jedes Element von der Form $f = \sum_{n=0}^\infty x_n t^n$ mit $x_0 = 1$ und $|x_n| \leqslant 1$ für alle $n \geqslant 0$ eine Einheit in B ist. Das folgt aus der Betrachtung einer geeigneten geometrischen Reihe. Wir schreiben $f = 1 + c$ mit $c := \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$ und betrachten die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B gegeben durch $g_n := \sum_{i=0}^\infty (-1)^i c^i$. Die Folge ist in jedem B_ρ eine Cauchyfolge wegen

$$|g_n - g_{n-1}|_\rho = |c^n|_\rho = |c|_\rho^n \leqslant \rho^n,$$

denn $c = t \cdot \sum_{n=1}^\infty x_n t^{n-1}$ und $|x_n| \leqslant 1$ für alle $n \geqslant 1$. Weil B_ρ vollständig ist, konvergiert die Folge in jedem B_ρ, also auch in jedem B_I für ein kompaktes Intervall $I \subset (0,1)$ und damit insgesamt auch in $B = \bigcap_{I\subset(0,1)} B_I$. Wir schreiben $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ für den Grenzwert. Schließlich ist für jedes $n \geqslant 0$ und alle $\rho \in (0,1)$

$$\begin{aligned} |f \cdot g_n - 1|_\rho &= |(1+c)\sum_{i=0}^n (-1)^i c^i - 1|_\rho \\ &= |1 + (-1)^n c^{n+1} - 1|_\rho \\ &= |c|_\rho^{n+1} \\ &\leqslant \rho^{n+1}. \end{aligned}$$

Es folgt $f \cdot g = 1$ in B, da ρ beliebig war. Das beendet den Beweis. $\square$

Wir setzen das Studium des Ringes B fort. Natürlich ist B als E-Algebra auch ein E-Vektorraum. Wir wollen ganz spezielle Untervektorräume betrachten, die bei der Konstruktion der Kurve eine wichtige Rolle spielen werden:

Definition 2.29. Für $n \geqslant 0$ definieren wir

$$B^{\varphi=t^n} := \{f \in B \mid \varphi(f) = t^n f\}.$$

Bemerkung 2.30. (i) Für jedes $n \geqslant 0$ ist $B^{\varphi=t^n}$ ein E-Untervektorraum von B, da der Frobenius auf E die Identität ist.

(ii) Ist $f \in B^{\varphi=t^n}$ und $g \in B^{\varphi=t^m}$, so gilt

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g) = t^n f t^m g = t^{n+m} fg,$$

d.h. $fg \in B^{\varphi=t^{n+m}}$. Wir erhalten also einen graduierten Ring

$$P := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^{\varphi=t^n}.$$

Da der Frobenius auf E trivial ist, gilt $E \subseteq B^{\varphi=1} = P_0$. Wir wollen als nächstes zeigen, dass das sogar eine Gleichheit ist, und dass in Wirklichkeit $P = \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}$ nichtnegativ graduiert ist. Das ist das folgende

Lemma 2.31. *(i)* $B^{\varphi=1} = E$.

(ii) Für alle $n < 0$ ist $B^{\varphi=t^n} = 0$.

Beweis. (i): Wie bereits mehrfach verwendet ist $E \subseteq B^{\varphi=1}$.
Für die umgekehrte Inklusion sei $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B^{\varphi=1}$. Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n = f = \varphi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^q t^n.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $c_n^q = c_n$ und daher $c_n \in k$ für alle n. Insbesondere ist $|c_n| \in \{0,1\}$ für alle n, da der Absolutbetrag auf k trivial ist. Für jedes $0 < \rho < 1$ ist $f \in B \subseteq B_\rho$ und daher $\lim_{n\to\infty} |c_{-n}|\rho^{-n} = 0$. Es gilt aber $\rho^{-n} \to \infty$ für $n \to \infty$. Wäre also nicht $c_n = 0$ für $n << 0$, so hätten wir einen Widerspruch. Damit hat f endlichen Hauptteil, d.h. $f \in k((t)) = E$.
(ii): Sei $f \in B^{\varphi=t^{-k}}$ für ein $k > 0$. Das bedeutet

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^q t^n = \varphi(f) = t^{-k} f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^{n-k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n+k} t^n.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$c_n^q = c_{n+k} \text{ bzw. } c_n = c_{n-k}^q \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Wegen $0 = \lim_{n\to-\infty} |c_n|(\frac{1}{2})^n$ gilt für jedes $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B$ aber automatisch $\lim_{n\to-\infty} c_n = 0$ in F. Zu $1 > \varepsilon > 0$ gibt es also $N \in \mathbb{Z}$ mit $|c_m| < \varepsilon$ für alle $m \leqslant N$. Ist nun $n \in \mathbb{Z}$ beliebig, so wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $n - km \leqslant N$, wobei wir $k > 0$ verwenden. Aus $(*)$ folgt dann $|c_n| = |c_{n-km}^{q^m}| < \varepsilon^{q^m} < \varepsilon$, da $\varepsilon < 1$. Da ε beliebig war, folgt $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, d.h. $f = 0$. □

Nachdem wir die algebraischen Eigenschaften von B studiert haben, sind wir jetzt in der Lage, die Kurve zu definieren.

Definition 2.32 (Fargues-Fontaine-Kurve)**.** Sei F ein perfekter Körper positiver Charakteristik, der vollständig bezüglich eines nichttrivialen nicht-archimedischen Absolutbetrages $|\cdot|$ ist. Sei $q = p^f$ eine p-Potenz mit $f > 0$ und k der Körper mit q Elementen. Wir nehmen $k \subseteq F$ an und setzen $E := k((t))$. Dann haben wir die graduierte E-Algebra

$$P := \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}.$$

Das E-Schema

$$X := X_{E,F} := Proj(P) = Proj(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n})$$

heißt die *Fargues-Fontaine-Kurve assoziiert mit E, F*.

Bemerkung 2.33. Die hier konstruierte Kurve basiert auf der Vorgabe zweier Körper E und F, die beide positive Charakteristik p haben. Man spricht von der Fargues-Fontaine-Kurve *in gleicher Charakteristik* und bezieht sich dabei auf den Körper E, der in diesem Fall ein lokaler Körper von gleicher Charakteristik ist, d.h. E und sein Restklassenkörper k besitzen dieselbe Charakteristik p. Für eine Kurve *in gemischter Charakteristik* betrachtet man denselben Körper F, jedoch ist in diesem Fall E eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, also ein nichtarchimedischer lokaler Körper der Charakteristik 0, dessen Restklassenkörper k positive Charakteristik p hat. Die Konstruktion der analogen Ringe B^b, B_I, B in gemischter Charakteristik ist deutlich schwieriger (vgl. [FF1], Kapitel 1).

Für das Studium der geometrischen Eigenschaften von X brauchen wir noch etwas Vorbereitung. Zunächst zeigen wir, dass es sich um ein nichtleeres Objekt handelt. Das folgt aus einer Charakterisierung des Eigenraums $B^{\varphi=t}$, dessen Elemente sich hier mit elementaren Mitteln bestimmen lassen. In gemischter Charakteristik ist auch das deutlich aufwändiger (vgl. [FF1], Prop. 4.3.2(2) und 4.4.5).

Wir bemerken, dass aufgrund der Vollkommenheit von F der Frobenius $\varphi = (x \mapsto x^q)$ auf F bijektiv ist und daher beliebige q-te Wurzeln in F existieren. Wir bezeichnen mit φ^{-1} die zu φ inverse Abbildung. Ist $a \in F$ und $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir

$$a^{q^{-n}} := \varphi^{-n}(a) = \underbrace{\varphi^{-1} \circ \ldots \circ \varphi^{-1}}_{n \text{ mal}}(a)$$

und nennen dieses Element von F die *q^n-te Wurzel aus a.*

Lemma 2.34. *Sei $\mathfrak{m}_F = \{a \in F \mid 0 \leqslant |a| < 1\}$ das maximale Ideal in $\mathfrak{o}_F$. Die Abbildung*

$$\mathfrak{m}_F \to B^{\varphi=t}, \quad a \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{q^{-n}} t^n,$$

ist wohldefiniert und bijektiv. Insbesondere ist $B^{\varphi=t^n} \neq 0$ für $n \geqslant 0$ und $X = Proj(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}) \neq \emptyset$.

Beweis. Für die Wohldefiniertheit zeigen wir zunächst, dass für jedes $a \in F$ mit $0 \leqslant |a| < 1$ die Reihe $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{q^{-n}} t^n$ ein Element von B ist. Sei dazu $0 < \rho < 1$. Wegen $|a|^{q^{-n}} \rho^n \leqslant \rho^n$ gilt $\lim_{n\to\infty} |a^{q^{-n}}|\rho^n = 0$. Wegen $|a| < 1$ können wir $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $|a|^{q^N} < \rho$, und wir erhalten

$$|a|^{q^n} \rho^{-n} = (|a|^{q^N})^{q^{n-N}} \rho^{-n} < \rho^{q^{n-N}} \rho^{-n} = \rho^{q^{n-N}-n}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} q^x - x = \infty$ wird der Exponent auf der rechten Seite beliebig groß und daher die rechte Seite wegen $\rho < 1$ beliebig klein, sodass auch $\lim_{n\to-\infty} |a|^{q^{-n}} \rho^n = 0$ und daher $f \in B_\rho$ gilt. Da ρ beliebig war, folgt $f \in \bigcap_{0<\rho<1} B_\rho = B$. Beachte nun

$$\varphi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{q^{-n+1}} t^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{q^{-n}} t^{n+1} = tf,$$

d.h. $f \in B^{\varphi=t}$, was die Wohldefiniertheit der Abbildung zeigt.

Wir zeigen jetzt die Bijektivität. Dazu beachte zunächst, dass die Abbildung additiv ist, denn der Frobenius auf F und damit auch sein Inverses sind Endomorphismen von F, da F perfekt ist. Für die Injektivität genügt es also zu zeigen, dass nur $0 \in F$ auf $0 \in B^{\varphi=t}$ abgebildet wird. Ist $a \in F$ mit

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{q^{-n}} t^n = \sum_{n<0} a^{q^{-n}} t^n + a + \sum_{n>0} a^{q^{-n}} t^n,$$

so liefert ein Koeffizientenvergleich $a = 0$. Daraus folgt die Injektivität.

Für den Beweis der Surjektivität sei $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B^{\varphi=t}$. Aus der Gleichung

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^q t^n = \varphi(f) = tf = t \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n-1} t^n$$

folgt $c_n^q = c_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Induktiv folgt daraus $c_n^{q^n} = c_0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, also $c_n = c_0^{q^{-n}}$ und damit $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_0^{q^{-n}} t^n$, und es bleibt zu zeigen, dass $|c_0| < 1$. Wäre $|c_0| \geqslant 1$, so hätten wir

$$|c_n| = |c_0|^{q^{-n}} \geqslant 1$$

für alle $n \leqslant 0$ und damit wäre

$$\lim_{n \to -\infty} |c_n| = \lim_{n \to -\infty} |c_0|^{q^{-n}} \geqslant 1.$$

Für $f \in B$ gilt aber wegen $\lim_{n \to -\infty} \rho^n = \infty$ für alle $0 < \rho < 1$ stets $\lim_{n \to -\infty} |c_n| = 0$. Es folgt also $|c_0| < 1$, und c_0 wird unter der Abbildung auf f abgebildet.

Da F nichttrivial bewertet ist, enthält $\mathfrak{m}_F$ ein von 0 verschiedenes Element, dessen Bild dann ein Element $s \in B^{\varphi = t} \setminus \{0\}$ liefert. Da B nullteilerfrei ist, gilt zusammen mit Bemerkung 2.30(ii) $s^n \in B^{\varphi = t^n} \setminus \{0\}$ für $n \geqslant 0$. Insbesondere ist $s \in P_+ := \bigoplus_{n>0} B^{\varphi = t^n}$ kein Nullteiler, sodass $Proj(P) \neq \emptyset$ gilt (vgl. [GW], Prop. 13.4).

□

2.4 Der Raum $|Y|$

Um die geometrischen Eigenschaften der Kurve zu untersuchen, benötigen wir einen Raum $|Y|$, der zunächst definiert wird als die *Menge der abgeschlossenen Ideale in B*. Wir erinnern daran, dass B eine F-Fréchetalgebra ist, deren Topologie von der Familie der Gaussnormen $(|\cdot|_\rho)_{0<\rho<1}$ erzeugt wird. Daher macht es Sinn, von *abgeschlossenen* Idealen zu sprechen.

Es wird sich herausstellen, dass $|Y| = \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ die *punktierte offene Einheitskreisscheibe* in F ist (vgl. Prop. 2.40), sofern F algebraisch abgeschlossen ist. Würden wir die Sprache der rigiden Geometrie verwenden, so ließe sich $|Y|$ konzeptioneller konstruieren (vgl. Bemerkung 2.39). Hier verwenden wir stattdessen eine ad-hoc-Konstruktion des Raumes $|Y|$.

Wir haben den Ring B aus den Ringen B_I für kompakte Intervalle $I \subset (0,1)$ erhalten. Um das Maximalspektrum von B zu verstehen, liegt es nahe, zunächst die Maximalspektren der B_I zu untersuchen. Das folgende Lemma stellt für kompakte Intervalle $I \subseteq J \subset (0,1)$ eine Beziehung zwischen den Maximalspektren der Ringe B_I und B_J her.

Lemma 2.35. *Für kompakte Intervalle $I \subseteq J \subset (0,1)$ mit $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$ induziert die Inklusion $B_J \hookrightarrow B_I$ eine wohldefinierte injektive Abbildung*

$$Max(B_I) \hookrightarrow Max(B_J), \ \ \mathfrak{m}_I \mapsto \mathfrak{m}_J := \mathfrak{m}_I \cap B_J.$$

Der kanonische Ringhomomorpismus $B_J/\mathfrak{m}_J \to B_I/\mathfrak{m}_I$ ist bijektiv.

Beweis. Die Voraussetzung $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$ stellt sicher, dass B_I von Null verschiedene maximale Ideale besitzt. Wählen wir nämlich $x \in F^\times$ mit $|x| \in I$, so haben wir nach Lemma 2.5 einen wohldefinierten und offenbar surjektiven Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi_x : B_I \to F, \ \ f \mapsto f(x).$$

Sein Kern enthält das Element $t - x \in B_I$ und ist daher ein von Null verschiedenes maximales Ideal in B_I.

Sei nun $\mathfrak{m}_I \subseteq B_I$ ein maximales Ideal. Da B_I kein Körper ist, gilt $\mathfrak{m}_I \neq 0$. Setzen wir $\mathfrak{m}_J := \mathfrak{m}_I \cap B_J$ unter Verwendung der Inklusion $B_J \subseteq B_I$, so liegt $\mathfrak{m}_J$ offenbar im Kern der Komposition

$$B_J \hookrightarrow B_I \twoheadrightarrow B_I/\mathfrak{m}_I.$$

Wir erhalten also einen Ringhomomorphismus

$$B_J/\mathfrak{m}_J \to B_I/\mathfrak{m}_I.$$

Wir zeigen, dass das ein Isomorphismus ist.

Der Beweis von Korollar 2.23 zeigt $\mathfrak{m}_I = B_I(\mathfrak{m}_I \cap F[t])$, sodass $\mathfrak{p} := \mathfrak{m}_I \cap F[t]$ ein von Null verschiedenes Primideal in $F[t]$ ist. Wegen $\dim F[t] = 1$ ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal und $L := (F[t]/\mathfrak{p})|F$ ist eine endliche Körpererweiterung, denn schreiben wir $\mathfrak{p} = (f)$ mit $f \in F[t]$ im Hauptidealring $F[t]$, so ist die Menge $\{1, t, \ldots, t^{\deg(f)-1}\}$ eine F-Basis von L und somit $\dim_F F[t]/\mathfrak{p} = \deg(f)$. Insbesondere ist L als endliche Erweiterung des vollständigen Körpers F ebenfalls vollständig bezüglich der eindeutigen Fortsetzung des Absolutbetrags $|\cdot|$ auf L, für den wir ebenfalls $|\cdot|$ schreiben. Wegen $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_I$ und $t \in B_I^\times$ ist $t \notin \mathfrak{p}$ und damit $L \cong F[t, t^{-1}]/\mathfrak{p}F[t, t^{-1}]$. Nun hat aber $F[t, t^{-1}] \hookrightarrow B_I$ dichtes Bild und induziert einen injektiven Ringhomomorphismus $L \hookrightarrow B_I/\mathfrak{m}_I$ ebenfalls mit dichtem Bild. Zu $\alpha \in B_I/\mathfrak{m}_I$ existiert dann aufgrund der Dichtheit eine Folge $(\alpha_i)_{i \geqslant 0}$ in L mit $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha$. Folglich ist $(\alpha_i)_{i\geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in L und konvergiert damit bereits in L, d.h. es gilt $\alpha \in L$ und $L \hookrightarrow B_I/\mathfrak{m}_I$ ist surjektiv, also ein Isomorphismus.

Analog gilt $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_J$ und $F[t, t^{-1}] \hookrightarrow B_J$ hat dichtes Bild, induziert also einen injektiven Ringhomomorphismus $L \hookrightarrow B_J/\mathfrak{m}_J$ mit dichtem Bild. Mit demselben Argument wie eben folgt aus der Dichtheit und der Vollständigkeit von L, dass das ein Isomorphismus ist. Nach Konstruktion haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & B_J/\mathfrak{m}_J \arrow[dd] \\
F[t]/\mathfrak{p} \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & \\
 & B_I/\mathfrak{m}_I
\end{tikzcd}$$

und es folgt, dass $B_J/\mathfrak{m}_J \to B_I/\mathfrak{m}_I$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist $\mathfrak{m}_J \subseteq B_J$ maximal. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung

$$Max(B_I) \to Max(B_J).$$

Für die Injektivität verwenden wir Korollar 2.23. Sind nämlich $\mathfrak{m}_I, \mathfrak{m}'_I$ maximale Ideale in B_I, die unter $Max(B_I) \to Max(B_J)$ auf dasselbe Ideal in B_J abgebildet werden, dann gilt

$$\mathfrak{m}_I \cap B_J = \mathfrak{m}'_I \cap B_J.$$

Insbesondere stimmen auch die Einschränkungen auf $F[t]$ überein, d.h. es gilt

$$\mathfrak{m}_I \cap F[t] = \mathfrak{m}'_I \cap F[t].$$

Nach dem Beweis von Korollar 2.23 gilt aber für jedes Ideal $J \subseteq B_I$ stets

$$J = (J \cap F[t])B_I$$

und daher

$$\mathfrak{m}_I = (\mathfrak{m}_I \cap F[t])B_I = (\mathfrak{m}'_I \cap F[t])B_I = \mathfrak{m}'_I.$$

□

Bemerkung 2.36. (i) Der Beweis zeigt, dass $B_I/\mathfrak{m}_I$ für jedes $\mathfrak{m}_I \in Max(B_I)$ ein endlichdimensionaler F-Vektorraum ist, sofern $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$.

(ii) Für kompakte Intervalle $I \subseteq J \subseteq (0,1)$ fassen wir ab jetzt $Max(B_I)$ als Teilmenge von $Max(B_J)$ auf über die in Lemma 2.35 konstruierte Injektion $Max(B_I) \hookrightarrow Max(B_J)$.

Definition 2.37. Wir bezeichnen mit $|Y|$ die *Menge der abgeschlossenen maximalen Ideale* der F-Fréchetalgebra B.

Das folgende Lemma stellt nun eine Beziehung zwischen $|Y|$ und den maximalen Idealen der Ringe B_I her:

Lemma 2.38. *Für ein kompaktes Intervall $I \subset (0,1)$ mit $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$ induziert der Ringhomomorphismus $B \hookrightarrow B_I$ eine wohldefinierte Injektion $Max(B_I) \hookrightarrow Max(B)$, $\mathfrak{m}_I \mapsto \mathfrak{m} := B \cap \mathfrak{m}_I$. Der kanonische Ringhomomorphismus $B/\mathfrak{m} \to B_I/\mathfrak{m}_I$ ist bijektiv. Es gilt*

$$|Y| = \bigcup_{I \subset (0,1) \text{ kpt. Intervall}} Max(B_I).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jedes maximale Ideal in B_I abgeschlossen ist. Sei also $\mathfrak{m}_I \in Max(B_I)$. Nach Korollar 2.23 ist B_I ein Hauptidealring, der kein Körper ist, d.h. es gilt $\mathfrak{m}_I = f \cdot B_I$ für ein $f \in B_I \setminus \{0\}$.

Ist $(fb_n)_{n \geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{m}_I$, so zeigt die Multiplikativität der ρ-Normen mit $\rho \in I$, dass $(b_n)_{n \geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in B_I ist. Für $b := \lim_{n\to\infty} b_n \in B_I$ gilt dann $\lim_{n\to\infty} fb_n = fb \in \mathfrak{m}_I$. Damit ist $\mathfrak{m}_I$ vollständig und insbesondere abgeschlossen. Folglich ist auch $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_I \cap B \subset B$ abgeschlossen, da $B \hookrightarrow B_I$ stetig ist. Wegen $F \hookrightarrow B/\mathfrak{m} \hookrightarrow B_I/\mathfrak{m}_I$ mit $\dim_F(B_I/\mathfrak{m}_I) < \infty$ ist $(B/\mathfrak{m})|F$ endlich und daher $B/\mathfrak{m}$ ein vollständiger Körper und somit $\mathfrak{m} \in |Y|$. Darüber hinaus hat $B \hookrightarrow B_I$ dichtes Bild, sodass auch $B/\mathfrak{m} \hookrightarrow B_I/\mathfrak{m}_I$ dichtes Bild hat und damit surjektiv ist wegen der Vollständigkeit von $B/\mathfrak{m}$.

Wegen $F[t] \subseteq B$ gilt $\mathfrak{m} \cap F[t] = \mathfrak{m}_I \cap F[t]$, sodass $\mathfrak{m}_I = B_I \cdot (\mathfrak{m}_I \cap F[t]) = B_I\mathfrak{m}$. Daraus folgt die Injektivität von $Max(B_I) \to |Y|$.

Sei schließlich $\mathfrak{m} \in |Y|$. Beachte für $I \subseteq J$:

- B_I, B_J sind Hauptidealringe und daher insbesondere noethersch.
- $B_J \hookrightarrow B_I$ ist ein flacher Ringhomomorphismus, da B_I nullteilerfrei und der Homomorphismus injektiv ist. Damit ist B_I ein torsionsfreier Modul über dem Hauptidealring B_J, also flach.
- $B_J \hookrightarrow B_I$ hat dichtes Bild, da $F[t, t^{-1}]$ in beiden dicht liegt.

Damit ist $B = \varprojlim_I B_I$ eine sogenannte Fréchet-Stein-Algebra und $\mathfrak{m}$ ist ein kozulässiger B-Modul (vgl. [ST], Lemma 3.6). Nach dem Beweis von [loc.cit.], Prop. 3.7, ist der kanonische Homomorphismus von F-Algebren

$$B/\mathfrak{m} \to \varprojlim_I B_I/\mathfrak{m}B_I$$

bijektiv. Wegen $B/\mathfrak{m} \neq 0$ existiert daher ein I mit $B_I/\mathfrak{m}B_I \neq 0$. Wähle $\mathfrak{m}_I \in Max(B_I)$ mit $\mathfrak{m}B_I \subseteq \mathfrak{m}_I$. Dann ist die Komposition $B/\mathfrak{m} \to B_I/\mathfrak{m}B_I \twoheadrightarrow B_I/\mathfrak{m}_I$ ein Homomorphismus von Körpern, also injektiv. Es folgt $\mathfrak{m} = B \cap \mathfrak{m}_I$. ☐

Bemerkung 2.39. In der (klassischen) rigiden Geometrie wird B_I ein Objekt ($Max(B_I)$, Strukturgarbe) zugeordnet, das als Kreisring zum Intervall I gedeutet werden kann. Der Homomorphismus $B_J \hookrightarrow B_I$ entspricht dann einer offenen Immersion, nämlich der Inklusion von Kreisringen zu den Intervallen $I \subseteq J$. Schließlich entspricht $|Y|$ der Menge der abgeschlossenen Punkte des Kreisrings zu $\bigcup_I = (0,1)$, d. h. der punktierten offenen Einheitskreisscheibe. Diese Heuristik wird im folgenden Sinn präziser:

Proposition 2.40. *Betrachte die punktierte offene Kreisscheibe $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} = \{x \in F : 0 < |x| < 1\}$ in F. Zu $x \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ gibt es einen wohldefinierten Homomorphismus $\varphi_x : B \to F$ von F-Algebren, gegeben durch $\varphi_x(f) = f(x)$. Es gilt $\mathfrak{m}_x := \ker(\varphi_x) = (t-x) \cdot B \in |Y|$, und die Abbildung $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} \to |Y|$, $x \mapsto \mathfrak{m}_x$, ist injektiv mit Bild $\{\mathfrak{m} \in |Y| : B/\mathfrak{m} = F\}$. Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist sie bijektiv.*

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. Ist $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n \in B$, so ist insbesondere $f \in B_\rho$ mit $\rho := |x|$. Daher gilt $\lim_{|n|\to\infty} |c_n x^n| = \lim_{|n|\to\infty} |c_n|\rho^n = 0$ und somit $\lim_{|n|\to\infty} c_n x^n = 0$ in F. Das zeigt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n x^n$ in F, d.h. die Abbildung φ_x ist ein wohldefinierter Homomorphismus von F-Algebren (vgl. auch Lemma 2.5).

Die Inklusion $(t-x)B \subseteq \mathfrak{m}_x$ ist klar. Es bleibt zu zeigen, dass $(t-x)B \subseteq B$ maximal ist. Wie im Beweis von Lemma 2.38 ist für jede Cauchyfolge $((t-x)b_n)_{n\geqslant 0}$ in $(t-x)B$ auch die Folge $(b_n)_{n\geqslant 0}$ eine Cauchyfolge in B. Ihr Grenzwert $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ erfüllt $\lim_{n\to\infty}(t-x)b_n = (t-x)b$, sodass das Ideal $(t-x)B \subseteq B$ vollständig, also insbesondere abgeschlossen ist.

Wegen $(t-x)B \cap F[t,t^{-1}] = (t-x) \cdot F[t,t^{-1}]$ ist $F \cong F[t,t^{-1}]/(t-x)F[t,t^{-1}] \hookrightarrow B/(t-x)B$ eine Injektion von F-Fréchetträumen mit dichtem Bild, also ein Isomomorphismus, da endlichdimensionale Unterräume von Fréchetträumen stets abgeschlossen sind. Es folgt $B/(t-x)B \cong F$ und damit $\mathfrak{m}_x = (t-x)B \in |Y|$.

<u>Bild</u>: Im Fall $F \xrightarrow{\cong} B/\mathfrak{m}$ existiert insbesondere $x \in F$ mit $t - x \in \mathfrak{m}$. Wegen $t \in B^\times$ ist $x \neq 0$. Wäre $|x| \geqslant 1$, so wäre $\sum_{n=0}^\infty x^{-n}t^n \in B$, denn für $\rho \in (0,1)$ hätten wir $|x^{-n}|\rho^n = (|x|^{-1}\rho)^n \leqslant \rho^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Wir hätten außerdem

$$\begin{aligned}(t-x)\cdot(-x^{-1}\cdot\sum_{n=0}^\infty x^{-n}t^n) &= \sum_{n=0}^\infty x^{-n}t^n - \sum_{n=0}^\infty x^{-n-1}t^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^\infty x^{-n}t^n - \sum_{n=1}^\infty x^{-n}t^n\\ &= 1.\end{aligned}$$

Folglich wäre $t - x \in B^\times$ mit Inversem $-x^{-1} \cdot \sum_{n=0}^\infty x^{-n}t^n$, im Widerspruch zu $t - x \in \mathfrak{m}$. Daher gilt $x \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. Unter der Identifikation $B/\mathfrak{m} = F$ stimmt die Restklassenabbildung $B \to B/\mathfrak{m} = F$ auf $F[t,t^{-1}]$ wegen $t - x \in \mathfrak{m}$ mit φ_x überein. Da $F[t,t^{-1}] \subseteq B$ dicht liegt, stimmt sie insgesamt mit φ_x überein und $\mathfrak{m} = \ker(\varphi_x) = \mathfrak{m}_x$.
Ist F algebraisch abgeschlossen, so gilt $B/\mathfrak{m} = F$ für jedes $\mathfrak{m} \in |Y|$, da $(B/\mathfrak{m})|F$ stets endlich ist, wie wir im Beweis von Lemma 2.38 gesehen haben. □

Im Folgenden schreiben wir wahlweise y für die Elemente von $|Y|$ oder $\mathfrak{m}_y$, falls die Interpretation als maximales Ideal hervorgehoben werden soll.

Für $y \in |Y|$ ist $B/\mathfrak{m}_y$ eine endliche Körpererweiterung von F (vgl. Lemma 2.38 und Bemerkung 2.36(i)), sodass sich der Absolutbetrag auf F eindeutig nach $B/\mathfrak{m}_y$ fortsetzt. Wir schreiben dafür wieder $|\cdot|$. Ist $f \in B$, so schreiben wir $f(y) := f + \mathfrak{m}_y \in B/\mathfrak{m}_y$ und meinen dann mit $|f(y)|$ den Absolutbetrag von $f(y) = f + \mathfrak{m}_y$ in $B/\mathfrak{m}_y$.

Lemma 2.41. *Für ein kompaktes Intervall $I \subset (0,1)$ mit $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$ und $y \in |Y|$ sind äquivalent:*

(i) $y \in Max(B_I)$

(ii) $|t(y)| \in I$.

Beweis. Sei $y \in Max(B_I)$ und schreibe $I = [\sigma, \rho]$. B_I ist eine F-Banachalgebra bezüglich der Norm $|f|_I = \sup_{\tau \in I} |f|_\tau = Max\{|f|_\sigma, |f|_\rho\}$. Nach [BGR], 3.8.2, Lemma 1, gilt

- $|t(y)| \leqslant |t|_I = \rho$
- $|t(y)|^{-1} = |t^{-1}(y)| \leqslant |t^{-1}|_I = \sigma^{-1}$.

Beides zusammen ergibt $|t(y)| \in [\sigma, \rho] = I$. Für die umgekehrte Implikation schreibe $\kappa(y) := B/\mathfrak{m}_y$. Ist dann $|t(y)| \in I$, so setzt sich die Restklassenabbildung $B \to B/\mathfrak{m}_y = \kappa(y)$ zu einem wohldefinierten Einsetzungshomomorphismus $\varphi : B_I \to \kappa(y)$ fort mit $f(t) \mapsto f(t(y))$. Für $\mathfrak{m}_I := \ker(\varphi)$ erhalten wir injektive Ringhomomorphismen

$$\kappa(y) = B/\mathfrak{m}_y = B/\ker(\varphi|_B) \hookrightarrow B_I/\mathfrak{m}_I \hookrightarrow \kappa(y).$$

Es folgt $\mathfrak{m}_I \in Max(B_I)$ mit $\mathfrak{m}_I \cap B = \mathfrak{m}_y$, d. h. $y \in Max(B_I)$. □

Wir schreiben für eine Teilmenge $I \subset (0,1)$ ab sofort $|Y|_I := \{y \in |Y| : |t(y)| \in I\}$. Im Fall $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$ mit I kompakt gilt $|Y|_I = Max(B_I)$ nach Lemma 2.41.

2.5 Divisoren auf $|Y|$

Das nächste Ziel ist es zu zeigen, dass für algebraisch abgeschlossenes F die E-Algebra $P = \bigoplus_{n \geqslant 0} B^{\varphi = t^n}$ ein graduiert faktorieller Ring ist (vgl. [FF1], 6.2.). Das bedeutet, dass jedes von Null verschiedene homogene Element im Wesentlichen eindeutig als ein Produkt homogener Elemente vom Grad 1 geschrieben werden kann (vgl. 2.49). Dafür brauchen wir etwas Vorbereitung und führen zunächst effektive Divisoren auf dem Raum $|Y|$ ein.

Ist $I \subset (0,1)$ ein kompaktes Intervall mit $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$ und $y \in |Y|_I = Max(B_I)$, so ist der Ring $B_{I,y}$ die Lokalisierung eines eindimensionalen Hauptidealringes an einem maximalen Ideal und somit ein diskreter Bewertungsring. Wir bezeichnen mit $ord_y : B_I \hookrightarrow B_{I,y} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \infty$ die zugehörige Bewertung, d.h. für $f \in B_I$ ist

$$ord_y(f) := \begin{cases} \max\{n \geqslant 0 \mid f \in \mathfrak{m}_y^n\} & \text{falls } f \neq 0, \\ \infty & \text{falls } f = 0. \end{cases}$$

Bemerkung 2.42. Im Hauptidealring B_I schreibt sich jedes $f \in B_I \setminus \{0\}$ als $f = u \cdot \prod_{i=1}^d p_i$ mit einer Einheit $u \in B_I^\times$ und Primelementen p_i. Bezüglich dieser Darstellung gilt

$$ord_y(f) = |\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant d \ \text{ und } \ y = (p_i)\}|.$$

Definition 2.43. (i) Wir bezeichnen mit

$$Div^+(Y) := \left\{ \delta : |Y| \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{supp}(\delta) \cap |Y|_I \text{ ist endlich für jedes} \\ \text{kompakte Intervall } I \subset (0,1) \end{array} \right\}$$

die Menge der *effektiven Divisoren* auf $|Y|$. Hierbei heißt $\text{supp}(\delta) = \{y \in |Y| : \delta(y) \neq 0\}$ der *Träger* der Abbildung δ. Wir schreiben $\delta = \sum_{y \in |Y|} a_y \cdot y$ als eine formale Summe, wobei y die charakteristische Funktion von $\{y\}$ bezeichnet und $a_y = \delta(y)$ ist.

(ii) Ist $f \in B \setminus \{0\}$, so definieren wir

$$div(f) := \sum_{y \in |Y|} ord_y(f) \cdot y \in Div^+(Y)$$

und nennen $div(f)$ den *Divisor* von f. Beachte, dass f als Element von B_I nur in den endlich vielen maximalen Idealen liegt, die seinen Primteilern entsprechen, sodass die Summe auf $|Y|_I$ tatsächlich endlich ist.

Bemerkung 2.44. (i) $Div^+(Y)$ ist ein additives Monoid und $div : B \setminus \{0\} \to Div^+(Y)$ ist ein Monoidhomomorphismus.

(ii) Da φ und φ^{-1} stetige Automorphismen von B sind, gilt für $y \in |Y|$ auch $\varphi(y), \varphi^{-1}(y) \in |Y|$, und die Abbildung

$$\varphi : |Y| \to |Y|, y \mapsto \varphi(y),$$

ist wohldefiniert und bijektiv. Nach Lemma 2.41 schränkt sich φ ein zu einer Bijektion

$$\varphi : |Y|_I \to |Y|_{\varphi(I)}$$

für jedes kompakte Intervall $I \subset (0,1)$ mit $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$. Wir erhalten eine wohldefinierte additive Abbildung

$$\varphi^* : Div^+(Y) \to Div^+(Y), \delta \mapsto \delta \circ \varphi,$$

und das Untermonoid der *φ-invarianten Divisoren*

$$Div^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) := \{\delta \in Div^+(Y) \mid \varphi^*\delta = \delta\}.$$

(iii) Ist $f \in B \setminus \{0\}$, so gilt $\varphi^* div(\varphi(f)) = div(f)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen: Ist $y \in |Y|_I$, so gilt $\varphi^* div(\varphi(f))(y) = div(f)(y) = ord_y(f)$. Schreibe $f = u \cdot \prod_{i=1}^d p_i$ in B_I mit $u \in B_I^\times$ und Primelementen $p_i \in B_I$. Dann ist $\varphi(f) = \varphi(u) \prod_{i=1}^d \varphi(p_i)$ in $B_{\varphi(I)}$. Nach der Bemerkung vor Definition 2.43 gilt dann für $y \in |Y|_I$

$$\begin{aligned}
\varphi^* div(\varphi(f))(\varphi(y)) &= div(\varphi(f))(\varphi(y)) \\
&= |\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant d \text{ und } \varphi(y) = (\varphi(p_i))\}| \\
&= |\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant d \text{ und } y = (p_i)\}| \\
&= ord_y(f).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.45. *(i) Sind $d_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ für $i = 1, 2$ und $f_i \in B^{\varphi = t^{d_i}} \setminus \{0\}$ mit $div(f_1) = div(f_2)$, so gilt $d_1 = d_2$ und es gibt $\alpha \in E^\times$ mit $f_1 = \alpha f_2$.*

(ii) Ist $\delta \in Div^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$, so gibt es $y_1, \ldots, y_d \in |Y|$ mit

$$\delta = \sum_{i=1}^{d} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(y_i).$$

Beweis. (i): Sei $I \subset (0,1)$ ein kompaktes Intervall. Wegen $div(f_1)|_{|Y|_I} = div(f_2)|_{|Y|_I}$ haben f_1 und f_2 im faktoriellen Ring B_I bis auf eine Einheit dieselbe Primfaktorzerlegung. Daher ist $\frac{f_1}{f_2} \in Quot(B) \cap B_I^\times$ für jedes kompakte Intervall $I \subset (0,1)$, also

$$\frac{f_1}{f_2} \in Quot(B) \cap \bigcap_{I \subset (0,1)} B_I^\times \subseteq Quot(B) \cap B = B,$$

d.h. $f_1 \in f_2 B$ und aufgrund der Symmetrie des Argumentes letztlich $f_1 B = f_2 B$. Das zeigt die Existenz eines Elementes $\alpha \in B^\times$ mit $\alpha f_1 = f_2$. Diese Gleichheit zeigt $\alpha \in B^{\varphi = t^{d_2 - d_1}} \setminus \{0\}$. Nach Lemma 2.31(ii) gilt $d_2 \geqslant d_1$. Analog zeigt $f_1 = \alpha^{-1} f_2$, dass α ein Element in $B^{\varphi = t^{d_1 - d_2}} \setminus \{0\}$ ist, und somit ist $d_1 \geqslant d_2$. Insgesamt folgt $d_1 = d_2$ und $\alpha \in B^{\varphi=1} \overset{2.31(i)}{=} E^\times$.
(ii): Beachte zunächst, dass $\delta_i := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y_i)$ für jedes $y_i \in |Y|$ ein Element in $Div^+(Y)$ ist.
Sei dazu $I = [\sigma, \rho] \subset (0,1)$ ein kompaktes Intervall mit $\sigma < \rho$. Nach Lemma 2.38 und Lemma 2.41 gilt $0 < |t(y_i)| < 1$. Daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|t(\varphi^n(y_i))| = |t(y_i)|^{q^n} < \sigma$$

und

$$|t(\varphi^{-n}(y_i))| = |t(y_i)|^{q^{-n}} > \rho$$

für alle $n \geqslant N$. Wegen Lemma 2.41 ist daher

$$\mathrm{supp}(\delta_i) \cap |Y|_I = \varphi^{\mathbb{Z}}(y_i) \cap \{y \in |Y| : |t(y)| \in I\} \subseteq \{\varphi^n(y_i) \mid -N \leqslant n \leqslant N\}$$

eine endliche Menge. Beachte, dass F perfekt ist und daher $|F^\times| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dicht liegt. Wegen $\sigma < \rho$ gilt daher $I \cap |F^\times| \neq \emptyset$.
Außerdem ist δ_i φ-invariant, denn für $y \in |Y|$ ist

$$\varphi^*\delta_i(y) = \delta_i(\varphi(y)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = \varphi^n(y_i) \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt $\varphi^*\delta_i = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y_i) = \delta_i$ und damit $\delta_i \in Div^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$.
Wähle $0 < \rho < 1$ beliebig und betrachte die endliche Menge

$$\{y_1, \ldots, y_e\} := \mathrm{supp}(\delta) \cap |Y|_{[\rho^q, \rho)} \subseteq \mathrm{supp}(\delta) \cap |Y|_{[\rho^q, \rho]},$$

wobei wir $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$ annehmen. Für alle $i \neq j$ ist $\varphi^{\mathbb{Z}} \cdot y_i \cap \varphi^{\mathbb{Z}} \cdot y_j = \emptyset$. Anderenfalls gäbe es $n \in \mathbb{Z}$ mit $y_i = \varphi^n(y_j)$ und damit

$$[\rho^q, \rho) \ni |t(y_i)| = |t(\varphi^n(y_j))| = |t(y_j)|^{q^n} \in [\rho^{q^{n+1}}, \rho^{q^n}).$$

Es würde $n = 0$ und damit $y_i = y_j$ folgen, im Widerspruch zur Annahme $y_i \neq y_j$.
Wir behaupten, dass $\delta = \sum_{i=1}^e \delta(y_i) \cdot \delta_i$ gilt. Dann sind wir fertig. Für alle $1 \leqslant i \leqslant e$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\delta(\varphi^n(y_i)) = (\varphi^* \circ \ldots \circ \varphi^* \delta)(y_i) = \delta(y_i) = (\sum_{j=1}^e \delta(y_i)\delta_j)(\varphi^n(y_i)),$$

da δ φ-invariant ist, und weil für $i \neq j$ wie oben gesehen $\varphi^n(y_i) \notin \varphi^{\mathbb{Z}} \cdot y_j = \mathrm{supp}(\delta_j)$ ist. Somit stimmen δ und $\sum_{j=1}^e \delta(y_i)\delta_j$ auf $\bigcup_{j=1}^e \varphi^{\mathbb{Z}} \cdot y_j$ überein.

Ist $y \notin \bigcup_{j=1}^{e} \varphi^{\mathbb{Z}} \cdot y_j = \bigcup_{j=1}^{e} \operatorname{supp}(\delta_j)$, so gilt $(\sum_{j=1}^{e} \delta(y_i)\delta_j)(y) = 0$. Es gilt auch $\delta(y) = 0$. Anderenfalls wählen wir $n \in \mathbb{Z}$ mit $|t(\varphi^n(y))| = |t(y)|^{q^n} \in [\rho^q, \rho)$. Dann ist $0 \neq \delta(y) = \delta(\varphi^n(y))$ wegen der φ-Invarianz von δ, d.h. $\varphi^n(y) \in \operatorname{supp}(\delta) \cap |Y|_{[\rho^q,\rho)} = \{y_1, \ldots, y_e\}$. Daraus folgt aber $y \in \varphi^{\mathbb{Z}}(y_i)$ für ein $1 \leqslant i \leqslant e$, ein Widerspruch zur Annahme $y \notin \bigcup_{j=1}^{e} \varphi^{\mathbb{Z}} \cdot y_j$. $\square$

Beispiel 2.46. Ist $n \geqslant 0$ und $f \in B^{\varphi = t^n} \setminus \{0\}$, so ist $div(f) \in Div^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$, denn

$$\varphi^* div(f) = \varphi^* div(t^n f) = \varphi^* div(\varphi(f)) = div(f).$$

Die erste Gleichheit verwendet $t^n \in B_I^\times$ für jedes kompakte Intervall $I \subset (0,1)$.

Wir erinnern an die Definition des Unterrings der beschränkten Laurentreihen

$$B^b = \{ \sum_{n \gg -\infty} c_n t^n \mid \sup_n |c_n| < \infty \}$$

in 2.26.

Lemma 2.47. *Sei F algebraisch abgeschlossen. Ist $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \in B^b \cap F[[t]]$ mit $c_0 \neq 0$, so ist $\{g \in B^b \mid \varphi(g) = fg\}$ ein eindimensionaler E-Vektorraum (vgl. [FF1], Prop. 6.2.10). Ist $f \in \mathfrak{o}_F[[t]]$, so wird er erzeugt von einem Element $g \in \mathfrak{o}_F[[t]] \setminus (t)$.*

Beweis. Sind $g_1, g_2 \in B^b \setminus \{0\}$ mit $\varphi(g_i) = f \cdot g_i$, so gilt $\varphi(\frac{g_1}{g_2}) = \frac{g_1}{g_2}$ im Körper $F((t))$. Also ist $\frac{g_1}{g_2} \in F((t))^{\varphi=1} = F^{\varphi=1}((t)) = k((t)) = E$. Das zeigt, dass die Dimension höchstens 1 ist.

Wähle $a \in F^\times$ mit $a \cdot f \in \mathfrak{o}_F[[t]]$. Angenommen, es gibt $h \in B^b \setminus \{0\}$ mit $afh = \varphi(h)$. Da F algebraisch abgeschlossen ist, können wir dann $w \in F$ mit $w^{q-1} = a$ wählen. Dann erfüllt $g := w^{-1}h \in B^b \setminus \{0\}$

$$\varphi(g) = \varphi(w^{-1}h) = w^{-q}afh = w^{-(q-1)}aw^{-1}fh = fg.$$

Daher können wir ohne Einschränkung $f \in \mathfrak{o}_F[[t]] \setminus (t)$ annehmen.

Wir konstruieren induktiv eine Folge $(g_n)_{n \geqslant 1}$ in $\mathfrak{o}_F[[t]]$ mit

(i) $g_1 \notin (t)$,

(ii) $g_{n+1} \equiv g_n \mod t^n \mathfrak{o}_F[[t]]$ für alle $n \geqslant 1$,

(iii) $\varphi(g_n) \equiv f g_n \mod t^n \mathfrak{o}_F[[t]]$ für alle $n \geqslant 1$.

Da $\mathfrak{o}_F[[t]]$ vollständig bezüglich des t-adischen Absolutbetrages ist, existiert nach Eigenschaft (ii) der Limes $g := \lim_{n \to \infty} g_n \in \mathfrak{o}_F[[t]]$ und erfüllt $\varphi(g) = fg$ wegen Eigenschaft (iii), da φ stetig bezüglich des t-adischen Absolutbetrages ist. Induktiv gilt $g_n \notin (t)$ für alle $n \geqslant 1$ und daher $g \notin (t)$, da $\mathfrak{o}_F[[t]] \setminus (t) = \{h \in \mathfrak{o}_F[[t]] : |h|_0 = 1\}$ abgeschlossen bezüglich des t-adischen Absolutbetrages ist, den wir wie schon früher mit $|\cdot|_0$ bezeichnen.

Konstruktion der g_n:

$n = 1$: Sei $a \in F$ mit $a^{q-1} = c_0$. Wegen $f \in \mathfrak{o}_F[[t]]$ ist dann $|a| = |c_0|^{\frac{1}{q-1}} \leqslant 1$ und wegen $c_0 \neq 0$ ist auch $a \neq 0$ und damit $g_1 := a \in \mathfrak{o}_F[[t]] \setminus (t)$. Außerdem gilt (iii), denn

$$\varphi(g_1) = a^q = a^{q-1} \cdot a = c_0 \cdot a \equiv f g_1 \mod (t).$$

$n \mapsto n+1$: Nach der Induktionsvoraussetzung existiert mithilfe von Eigenschaft (iii) ein Element $h = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n \in \mathfrak{o}_F[[t]]$ mit $\varphi(g_n) - f g_n = t^n h$. Wir betrachten das Polynom $P(t) = t^q - c_0 t +$

$a_0 \in \mathfrak{o}_F[t]$. Es besitzt eine Nullstelle $a \in \mathfrak{o}_F$, denn das Produkt all seiner Nullstellen ist $\pm a_0 \in \mathfrak{o}_F$. Wir setzen $g_{n+1} := g_n + at^n$. Dann ist Eigenschaft (ii) per Definition erfüllt, und Eigenschaft (iii) folgt aus

$$\begin{aligned}\varphi(g_{n+1}) - fg_{n+1} &= \underbrace{\varphi(g_n) - fg_n}_{\equiv t^n a_0 \ (t^{n+1})} + t^n(a^q - \underbrace{af}_{\equiv ac_0 \ (t)}) \\ &\equiv t^n(a^q - c_0 a + a_0) \mod (t^{n+1}) \\ &\equiv 0 \mod (t^{n+1}).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.48. *Sei F algebraisch abgeschlossen. Sei $a \in F$ mit $0 < |a| < 1$ und betrachte das Element $f = t - a \in B$ mit zugehörigem Punkt $y := (f) \in |Y|$. Wähle $g \in \mathfrak{o}_F[[t]] \setminus (t)$ mit $\varphi(g) = fg$ (vgl. Lemma 2.47).*

(i) Das Produkt $h := \prod_{n\geqslant 0} \frac{\varphi^n(f)}{t} = \prod_{n\geqslant 0}(1 - \frac{a^{q^n}}{t})$ konvergiert in B.

(ii) Das Element $gh \in B^{\varphi = t}$ erfüllt $div(gh) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y) \in Div^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$.

Beweis. (i): Es genügt zu zeigen, dass die Folge $(P_m)_{m\geqslant 0}$ mit $P_m := \prod_{n=0}^m (1 - \frac{a^{q^n}}{t})$ für jedes $0 < \rho < 1$ eine Cauchyfolge in B_ρ ist.

Sei $0 < \rho < 1$. Wegen $|\frac{a^{q^n}}{t}|_\rho = \rho^{-1}|a|^{q^n} \to 0$ für $n \to \infty$ haben fast alle Faktoren ρ-Norm 1. Daher gibt es eine Konstante C mit $|P_m|_\rho \leqslant C$ für alle $m \geqslant 0$. Wegen $P_{m+1} = P_m(1 - \frac{a^{q^{m+1}}}{t})$ gilt $|P_{m+1} - P_m|_\rho \leqslant C \cdot \rho^{-1}|a|^{q^{m+1}} \to 0$ für $m \to \infty$, d.h. $(P_m)_{m\geqslant 0}$ ist eine Cauchyfolge in B_ρ. Wegen der Vollständigkeit von B_ρ konvergiert das unendliche Produkt in B_ρ bezüglich $|\cdot|_\rho$ und damit konvergiert es in B.

(ii): Die Stetigkeit von φ impliziert $\varphi(h) = \prod_{n\geqslant 1} \frac{\varphi^n(f)}{t}$. Also gilt

$$\varphi(gh) = fg\varphi(h) = tg\frac{f}{t}\varphi(h) = tg\prod_{n\geqslant 0}\frac{\varphi^n(f)}{t} = tgh.$$

Die Gleichheit $div(gh) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y)$ zeigen wir unter Benutzung der Identität $div(gh) = div(g) + div(h)$ in zwei Schritten. Dazu zeigen wir zunächst $div(h) = \sum_{n\geqslant 0} \varphi^n(y)$.

Sei dazu $I = [\sigma, \rho] \subset (0,1)$ ein kompaktes Intervall. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a|^{q^n} \leqslant \frac{\sigma}{2}$ für alle $n \geqslant N$ und somit

$$|\frac{a^{q^n}}{t}|_I = \max\{\frac{|a|^{q^n}}{\sigma}, \frac{|a|^{q^n}}{\rho}\} = \frac{|a|^{q^n}}{\sigma} \leqslant \frac{1}{2} < 1,$$

d.h. die Reihe $\sum_{j=0}^\infty (\frac{a^{q^n}}{t})^j$ ist in B_I konvergent und invers zu $1 - \frac{a^{q^n}}{t}$. Damit ist $1 - \frac{a^{q^n}}{t} \in B_I^\times$ für alle $n \geqslant N$. Außerdem gilt

$$|t(\varphi^n(y))| = |t + (t - a^{q^n})| = |a^{q^n} + (t - a^{q^n})| = |a|^{q^n} < \sigma,$$

d.h. $(t - a^{q^n}) = \varphi^n(y) \notin |Y|_I$ für alle $n \geq N$.

Sei $B_{\frac{1}{2}}(1) := \{b \in B_I : |1 - b|_I \leqslant \frac{1}{2}\}$. Da $|\cdot|_I$ submultiplikativ ist, ist $B_{\frac{1}{2}}(1)$ multiplikativ abgeschlossen, denn sind $1 + \alpha, 1 + \beta \in B_{\frac{1}{2}}(1)$, so gilt

$$|(1+\alpha)(1+\beta) - 1|_I = |\alpha + \beta + \alpha\beta|_I \leqslant \frac{1}{2}.$$

Außerdem ist $B_{\frac{1}{2}}(1)$ topologisch abgeschlossen und damit vollständig bezüglich $|\cdot|_I$. Ferner gilt $B_{\frac{1}{2}}(1) \subseteq B_I^\times$, denn ist $b \in B_{\frac{1}{2}}(1)$, so schreibe $b = 1-\alpha$ mit $\alpha \in B_I$. Dann ist $|\alpha|_I \leqslant \frac{1}{2}$ und somit die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^\infty \alpha^j$ konvergent in B_I und invers zu $b = 1-\alpha$. Es folgt

$$\prod_{n \geqslant N} (1 - \frac{a^{q^n}}{t}) \in B_{\frac{1}{2}}(1) \subseteq B_I^\times.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} div(h)|_{|Y|_I} &= div(\prod_{n=0}^{N-1}(1-\frac{a^{q^n}}{t}))|_{|Y|_I} = div(\prod_{n=0}^{N-1}\frac{\varphi^n(f)}{t})|_{|Y|_I} = (\sum_{n=0}^{N-1} div(\frac{\varphi^n(f)}{t}))|_{|Y|_I} \\ &= (\sum_{n=0}^{N-1} div(\varphi^n(f)))|_{|Y|_I} = (\sum_{n=0}^{\infty} div(\varphi^n(f)))|_{|Y|_I}, \end{aligned}$$

weil $t \in B_I^\times$ und wegen $(\varphi^n(f)) = \varphi^n(y) \notin |Y|_I$ für $n \geqslant N$. Da I beliebig war, folgt

$$div(h) = \sum_{n \geqslant 0} \varphi^n(y).$$

Als nächstes zeigen wir $div(g) = \sum_{n<0} \varphi^n(y)$. Aus $\varphi(g) = fg$ erhalten wir per Induktion für alle $n \geqslant 0$

$$g = \varphi^{-n}(g) \cdot \prod_{i=1}^{n} \varphi^{-i}(f).$$

Es folgt

$$div(g) = div(\varphi^{-n}(g)) + \sum_{i=1}^{n} \varphi^{-i}(y).$$

für alle $n \geqslant 0$. Sei $I \subset (0,1)$ ein kompaktes Intervall. Wir schreiben $g = \sum_{n=0}^\infty b_n t^n$ mit $b_n \in \mathfrak{o}_F$ und $b_0 \neq 0$. Für festes $0 < \rho < |b_0|$ gilt dann

$$|\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n|_\rho \leqslant |t|_\rho = \rho < |b_0| = |b_0|_\rho.$$

Mithilfe einer geeigneten geometrischen Reihe ist dann

$$g = b_0(1 + b_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n) \in B_\rho^\times.$$

Es folgt $\mathrm{supp}(div(g)) \subseteq |Y|_{(\rho,1)}$, also $\mathrm{supp}(div(\varphi^{-n}(g))) \subseteq |Y|_{(\rho^{\frac{1}{q^n}},1)}$ für jedes $n \geqslant 0$. Wählen wir nun $N \in \mathbb{N}$, so dass $(\rho^{\frac{1}{q^N}},1) \cap I = \emptyset$ und $(|a|^{\frac{1}{q^N}},1) \cap I = \emptyset$, so ist

$$\mathrm{supp}(div(\varphi^{-n}(g))) \cap |Y|_I = \emptyset,$$

und wegen $|t(\varphi^{-n}(y))| = |a|^{\frac{1}{q^n}} > |a|^{\frac{1}{q^N}}$ für alle $n > N$ gilt auch

$$\mathrm{supp}(\sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi^{-n}(y)) \cap |Y|_I = \emptyset.$$

Es folgt

$$div(g)|_{|Y|_I} = \underbrace{div(\varphi^{-N}(g))|_{|Y|_I}}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \varphi^{-i}(y)|_{|Y|_I} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{-i}(y)|_{|Y|_I}.$$

Da I beliebig war, folgt $div(g) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{-i}(y)$ und damit insgesamt

$$div(gh) = div(g) + div(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{-i}(y) + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{i}(y) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi^{i}(y).$$

□

Satz 2.49. *Sei F algebraisch abgeschlossen.*

(i) Ist $n \geqslant 1$ und $f \in B^{\varphi=t^n} \setminus \{0\}$, so gibt es $t_1, \dots, t_n \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$, so dass $f = t_1 \cdot \ldots \cdot t_n$. Bis auf Permutation der t_i und Multiplikation mit Elementen aus $E^\times$ sind die Elemente $t_1, \dots, t_n$ eindeutig. Wir sagen, der Ring $P = \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}$ ist graduiert faktoriell.

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} (B^{\varphi=t} \setminus \{0\})/E^\times &\longrightarrow |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} := \{\{\varphi^n(y) \mid n \in \mathbb{Z}\} \mid y \in |Y|\} \\ s \cdot E^\times &\longmapsto \operatorname{supp}(div(s)), \end{aligned}$$

ist eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis. (i): Das Beispiel nach Lemma 2.45 zeigt, dass $div(f)$ φ-invariant ist. Nach Lemma 2.45(ii) existieren Elemente $y_1, \dots, y_d \in |Y|$ mit $div(f) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y_i)$. Nach Proposition 2.40 können wir $y_i = (f_i)$ mit $f_i = t - a_i$ für gewisse $a_i \in F$ mit $0 < |a_i| < 1$ schreiben. Nach Lemma 2.48 existiert zu jedem $1 \leqslant i \leqslant d$ ein Element $t_i \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$, so dass $div(t_i) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y_i)$. Dann ist $t_1 \cdot \ldots \cdot t_d \in B^{\varphi=t^d} \setminus \{0\}$ mit

$$div(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d) = \sum_{i=1}^{d} div(t_i) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y_i) = div(f).$$

Nach Lemma 2.45(i) gilt $d = n$ und es existiert ein Element $\alpha \in E^\times$ mit $f = \alpha \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_n$. Wegen $\alpha t_1 \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ zeigt dies die Existenz der Zerlegung. Die Eindeutigkeit zeigen wir per Induktion nach $n \geqslant 1$.

$\underline{n = 1}$: trivial.

$\underline{n \mapsto n + 1}$: Sei $f \in B^{\varphi=t^{n+1}} \setminus \{0\}$ und seien $f = t_1 \cdot \ldots \cdot t_{n+1} = s_1 \cdot \ldots \cdot s_{n+1}$ zwei Zerlegungen von f mit $t_i, s_i \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$. Der Existenzbeweis angewendet auf t_i, s_i zeigt $div(t_i) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y_i)$ und $div(s_i) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(w_i)$ für gewisse $y_i, w_i \in |Y|$.

Wegen

$$\{\varphi^m(y_i) \mid m \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant n+1\} = \operatorname{supp}(div(f)) = \{\varphi^m(w_i) \mid m \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$$

existiert $1 \leqslant i \leqslant n+1$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $y_{n+1} = \varphi^m(w_i)$. Durch eventuelles Vertauschen der Indizes können wir ohne Einschränkung $i = n + 1$ annehmen. Dann ist

$$div(t_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(w_{n+1}) = div(s_{n+1}).$$

Nach Lemma 2.45(i) existiert $\alpha \in E^\times$ mit $t_{n+1} = \alpha \cdot s_{n+1}$, d.h. $t_1 \cdot \ldots \cdot t_n \cdot \alpha = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$. Mit der Induktionsannahme folgt die Behauptung.

(ii): Wegen $E^\times \subseteq B_I^\times$ für jedes $I \subset (0,1)$ ist $div(\alpha s) = div(s)$ für alle $\alpha \in E^\times$ und alle $s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$. Der Beweis von (i) zeigt außerdem, dass der Träger von $div(s)$ ein einziger φ-Orbit ist. Sind $s_1, s_2 \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{supp}(div(s_1)) = \mathrm{supp}(div(s_2))$, so folgt

$$div(s_1) = \sum_{w \in \mathrm{supp}(div(s_1))} w = \sum_{w \in \mathrm{supp}(div(s_2))} w = div(s_2).$$

Nach Lemma 2.45(i) gibt es dann $\alpha \in E^\times$ mit $s_1 = \alpha s_2$. Das zeigt die Injektivität.

Die Surjektivität folgt aus Proposition 2.48(ii). $\square$

Bemerkung 2.50. Wenn F nicht algebraisch geschlossen ist, so existieren in der graduierten Algebra P homogene Elemente vom Grad > 1, die keine Produkte von Elementen vom Grad 1 sind (vgl. [FF1], Bemerkung 7.3.2).

3 Geometrie der Kurve

In diesem Kapitel weisen wir erste geometrische Eigenschaften der Kurve nach. Dazu benötigen wir zunächst einige Eigenschaften von formalen Gruppen und Lubin-Tate-Moduln, mit deren Hilfe wir die Existenz der sogenannten fundamentalen exakten Sequenz beweisen können. Als mögliche Referenz für die Theorie formaler Gruppen und Lubin-Tate-Moduln verweisen wir auf [Neu], Kapitel V, §4. Aus dieser Sequenz lassen sich dann wesentliche geometrische Eigenschaften der Kurve ableiten, insbesondere können wir damit Gemeinsamkeiten und Unterschiede zur projektiven Geraden beweisen.

3.1 Die fundamentale exakte Sequenz

Sei p eine Primzahl. Wie im vorherigen Kapitel sei k der Körper mit q Elementen, wobei q eine p-Potenz ist. Dann ist $E = k((t))$ ein lokaler Körper von Charakteristik p mit Bewertungsring $\mathfrak{o}_E = k[[t]]$ und uniformisierendem Element t. Wir betrachten eine formale Potenzreihe $[t](X) \in \mathfrak{o}_E[[X]]$ mit $[t](X) \equiv tX \mod X^2$ und $[t](X) \equiv X^q \mod t$ und bezeichnen mit G den zugehörigen Lubin-Tate-Modul über $\mathfrak{o}_E$ (vgl. [Neu], Kapitel V, §4). Das ist eine eindimensionale kommutative formale Gruppe $G = G(X,Y) \in \mathfrak{o}_E[[X,Y]]$ über $\mathfrak{o}_E$ zusammen mit einem Ringhomomorphismus

$$\mathfrak{o}_E \to End_{\mathfrak{o}_E}(G), \alpha \mapsto [\alpha](X) \in \mathfrak{o}_E[[X]],$$

mit $[\alpha](X) \equiv \alpha X \mod X^2$ für alle $\alpha \in \mathfrak{o}_E$.
Wir nehmen an, dass $[t](X)$ p-typisch ist, d.h. schreiben wir $[t](X) = \sum_{m\geqslant 0} a_m X^m$, so gilt $a_m = 0$ für alle $m \notin p^{\mathbb{Z}}$. Da wir in gleicher Charakteristik arbeiten, folgt dann, dass die unterliegende formale Gruppe von G einfach die additive formale Gruppe $G(X,Y) = X + Y$ ist. Das folgt aus der Eindeutigkeitsaussage von [Neu], Satz V.2.2, da $[t](X+Y) = [t](X)+[t](Y)$ in Charakteristik p.
Man beachte, dass die additive formale Gruppe $\mathbb{G}_a$ ebenfalls ein formaler $\mathfrak{o}_E$-Modul ist vermöge

$$\mathfrak{o}_E \to End_{\mathfrak{o}_E}(\mathbb{G}_a), \alpha \mapsto \alpha X.$$

Allerdings ist das kein Lubin-Tate-Modul. Nach [GH], §3, gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\log_G : G \to \mathbb{G}_a$ formaler $\mathfrak{o}_E$-Moduln über $E = Quot(\mathfrak{o}_E)$ mit $\log'_G(0) = 1$. Hierbei bezeichnet $\log'_G$ die formale Ableitung der Potenzreihe $\log_G(X) \in E[[X]]$. Nach [loc.cit.], Lemma 13.3, kann G so gewählt werden, dass

$$\log_G(X) = \sum_{n\geqslant 0} t^{-n} X^{q^n}$$

gilt. Ist nun R eine $\mathfrak{o}_E$-Algebra und I ein Ideal, so dass R I-adisch separiert und vollständig ist, so wird die Menge I zu einem topologischen $\mathfrak{o}_E$-Modul bezüglich der gewöhnlichen Addition und der Skalarmultiplikation

$$\alpha * r := [\alpha](r)$$

für alle $\alpha \in \mathfrak{o}_E$, $r \in I$. Für $x \in \mathfrak{m}_F$ wird $\mathfrak{o}_F$ zu einer $\mathfrak{o}_E$-Algebra über den Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi_x : \mathfrak{o}_E \to \mathfrak{o}_F, \sum_{m\geqslant 0} c_m t^m \mapsto \sum_{m\geqslant 0} c_m x^m.$$

Durch G wird die Menge $\mathfrak{m}_F$ zu einem topologischen $\mathfrak{o}_E$-Modul, den wir mit $G(\mathfrak{o}_{F,x})$ bezeichnen.

Lemma 3.1. *Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist die Abbildung $(\cdot)^\# : G(\mathfrak{o}_{F,0}) \to G(\mathfrak{o}_{F,x})$ mit $z^\# := \lim_{n\to\infty}(t^n * z^{q^{-n}})$ wohldefiniert, $\mathfrak{o}_E$-linear und surjektiv. Hierbei bezeichnet $*$ die Skalarmultiplikation in $G(\mathfrak{o}_{F,x})$.*

Beweis. Da alle Lubin-Tate-Moduln zum Primelement t isomorph sind (vgl. [Neu], Theorem V.4.6(ii)), dürfen wir $[t](X) = tX + X^q$ annehmen.

Wir zeigen zunächst die Konvergenz von $z^\#$. Für alle $a \in \mathfrak{m}_F$ gilt

$$t * xa = [t](xa) = t \cdot xa + x^q a^q = x^2 a + x^q a^q \in (x^2 a)$$

nach Definition der $\mathfrak{o}_E$-Algebrastruktur auf $G(\mathfrak{o}_{F,x})$ via $t \mapsto x$. Induktiv folgt daraus $t^n * xa \in (x^{n+1}a)$ für alle $n \geqslant 0$. Zudem gilt für $n \geqslant 1$ und $z \in \mathfrak{m}_F$

$$t * z^{q^{-n}} - z^{q^{-(n-1)}} = xz^{q^{-n}} + z^{q^{-(n-1)}} - z^{q^{-(n-1)}} = xz^{q^{-n}} \in (xz^{q^{-n}})$$

und daraus folgt wie eben gesehen

$$t^n * z^{q^{-n}} - t^{n-1} * z^{q^{-(n-1)}} \in (x^n z^{q^{-n}}). \tag{1}$$

Daraus folgt die Konvergenz von $z^\#$.

Beachte, dass die unterliegende additive Gruppenstruktur von $G(\mathfrak{o}_{F,0})$ und $G(\mathfrak{o}_{F,x})$ die gewöhnliche Addition ist. Wir erhalten

$$(z+w)^\# = \lim_{n\to\infty} t^n * (z+w)^{q^{-n}} = \lim_{n\to\infty} t^n * (z^{q^{-n}} + w^{q^{-n}}) = z^\# + w^\#.$$

Als nächstes zeigen wir, dass $(\cdot)^\#$ stetig ist. Aufgrund der Additivität genügt es, die Stetigkeit im Nullpunkt nachzuweisen. Indem wir

$$z^\# - z = \lim_{n\to\infty} (t^n * z^{q^{-n}} - z)$$

mit

$$t^n * z^{q^{-n}} - z = \sum_{m=0}^{n-1} (t^{m+1} * z^{q^{-(m+1)}} - t^m * z^{q^{-m}})$$

schreiben, zeigt (1)

$$|z^\# - z| \leqslant \sup_{n\geqslant 1} |x|^n |z|^{\frac{1}{q^n}}.$$

Nun sei $0 < \varepsilon \leqslant 1$ gegeben. Wähle $m \geqslant 0$ mit $|x|^m \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Für $z \in \mathfrak{m}_F$ mit $|z| < \varepsilon^{q^m}$ gilt dann im Fall $n \leqslant m$

$$|x|^n |z|^{\frac{1}{q^n}} \leqslant |z|^{\frac{1}{q^n}} \leqslant |z|^{\frac{1}{q^m}} < \varepsilon$$

und im Fall $n > m$

$$|x|^n |z|^{\frac{1}{q^n}} \leqslant |x|^n < |x|^m \leqslant \varepsilon.$$

Es folgt $|z^\# - z| \leqslant \varepsilon$ und daraus

$$|z^\#| = |z^\# - z + z| \leqslant \max\{\varepsilon, \varepsilon^{q^m}\} = \varepsilon.$$

Das zeigt die behauptete Stetigkeit.

Für die Verträglichkeit von $(\cdot)^\#$ mit der Skalarmultiplikation dürfen wir $\alpha \in k[t] \subseteq k[[t]] = \mathfrak{o}_E$ annehmen, da Skalarmultiplikation und $(\cdot)^\#$ stetig sind und da $k[t] \subseteq \mathfrak{o}_E$ dicht liegt. Aufgrund der bereits gezeigten Additivität genügt es, die Fälle $\alpha \in k$ und $\alpha = t$ zu behandeln.

Für $\alpha \in k$ gilt

$$[t](\alpha X) = t \cdot \alpha X + \alpha^q X^q = \alpha(tX + X^q) = \alpha[t](X)$$

und daher $[\alpha](X) = \alpha X$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in [Neu], Satz V.2.2. Es folgt

$$(\alpha z)^{\#} = \lim_{n\to\infty} t^n * (\alpha z)^{q^{-n}} = \lim_{n\to\infty} t^n * (\alpha z^{q^{-n}}) = \lim_{n\to\infty} t^n * \alpha * z^{q^{-n}} = \alpha * z^{\#}$$

aufgrund der Kommutativität und Stetigkeit von $*$.
In $G(\mathfrak{o}_{F,0})$ gilt für $\alpha = t$ andererseits $[t](z) = t \cdot z + z^q = z^q$ und daher

$$([t](z))^{\#} = (z^q)^{\#} = \lim_{n\to\infty} t^n * z^{q^{-(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} t * t^{n-1} * z^{q^{-(n-1)}} = t * z^{\#}.$$

Für die Surjektivität beachte zunächst, dass Skalarmultiplikation $t * (\cdot)$ auf $G(\mathfrak{o}_{F,x})$ surjektiv ist. Das liegt daran, dass sie durch das Polynom $tX + X^q$ gegeben und F algebraisch abgeschlossen ist. Sei nun $w \in G(\mathfrak{o}_{F,x}) = \mathfrak{m}_F$. Setze $w_0 := w$ und konstruiere induktiv $w_m \in \mathfrak{m}_F$ mit $t * w_m = w_{m-1}$ für alle $m \geqslant 1$. Wegen

$$w_{m-1} = t * w_m = x w_m + w_m^q$$

gilt

$$w_m^q \equiv w_{m-1} \mod (x)$$

und daher

$$w_m^{q^m} \equiv w_{m-1}^{q^{m-1}} \mod (x^{q^{m-1}}).$$

Daher existiert $z := \lim_{m\to\infty} w_m^{q^m}$ in $\mathfrak{m}_F$. Es gilt

$$z^{\#} = \lim_{m\to\infty} (w_m^{q^m})^{\#} = \lim_{m\to\infty} t^m * w_m^{\#}$$

aufgrund der Stetigkeit und Linearität von $(\cdot)^{\#}$. Wie früher gesehen gilt aber

$$w_m - w_m^{\#} \in (x)$$

und daher

$$t^m * w_m - t^m * w_m^{\#} \in (x^{m+1}).$$

Daher hat die Folge $(t^m * w_m^{\#})_{m\geqslant 0}$ denselben Grenzwert wie die Folge $(t^m * w_m)_{m\geqslant 0}$. Allerdings gilt $t^m * w_m = w_0 = w$ für alle $m \geqslant 0$ und daher $z^{\#} = w$.

□

Den folgenden Satz beweisen Fargues und Fontaine in etwas allgemeinerer Form in [FF1], Thm. 6.4.1.

Satz 3.2 (Fundamentale exakte Sequenz)**.** *Es sei F algebraisch abgeschlossen, $x \in |Y| = \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ und $s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit $div(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(x)$. Dann ist*

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow E \longrightarrow B^{\varphi=t} \longrightarrow F \longrightarrow 0 \\ \alpha \longmapsto \alpha s \end{gathered}$$

eine exakte Sequenz von E-Vektorräumen, wobei $B^{\varphi=t} \to F$ die Einschränkung des Einsetzungshomomorphismus $\varphi_x : B \to F$ ist.

Beweis. Die Injektivität von $E \longrightarrow B^{\varphi=t}$ ist klar, da B nullteilerfrei und $s \neq 0$ ist.

Für die Exaktheit an $B^{\varphi=t}$ beachte, dass $div(s)(x) = 1$ und damit $s \in (x)$ ist. Über die Identifikation $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} = |Y|$ ist $(x) = \mathfrak{m}_x$ der Kern von φ_x. Somit liegt das Bild der linken Abbildung im Kern der rechten.

Ist umgekehrt $r \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\} \cap \ker(\varphi_x)$, so ist $r \in \mathfrak{m}_x$ und damit $div(r)(x) \neq 0$. Nach dem Beweis von 2.49(i) ist $\operatorname{supp}(div(r))$ ein einziger φ-Orbit. Somit haben wir $\operatorname{supp}(div(r)) = \varphi^{\mathbb{Z}} \cdot x$ und mit 2.49(ii) folgt $r \in s \cdot E^{\times}$.

Für die Surjektivität der rechten Abbildung betrachten wir den formalen Lubin-Tate-Modul G über $\mathfrak{o}_E$ mit Logarithmus

$$\log_G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} X^{q^n}.$$

Beachte, dass $\log_G : G \to \mathbb{G}_a$ ein über E definierter Homomorphismus formaler $\mathfrak{o}_E$-Moduln ist. Durch Einsetzen erhält man daher eine $\mathfrak{o}_E$-lineare Abbildung

$$\log_G : G(\mathfrak{o}_{F,x}) = \mathfrak{m}_F \to F$$

gegeben durch

$$\log_G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} \cdot z^{q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} \cdot z^{q^n} \in F,$$

wobei wir wiederum verwenden, dass F eine $\mathfrak{o}_E$-Algebra ist via $t \mapsto x$. Wegen $x \neq 0$ setzt sie sich zu einer E-Vektorraumstruktur mit $t^{-1} \mapsto x^{-1}$ fort. Die Konvergenz der Reihe $\log_G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} z^{q^{-n}}$ rechnet man wie im Beweis von Lemma 2.34 nach. Wir erinnern an die dort definierte Abbildung

$$\mathfrak{m}_F \to B^{\varphi=t}$$

gegeben durch

$$z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^{-n} z^{q^n}.$$

Es genügt zu zeigen, dass die Komposition

$$\mathfrak{m}_F \to B^{\varphi=t} \to F$$

surjektiv ist. Ihr Wert auf z ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{-n} z^{q^n} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{-(k-n)} z^{q^{k-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} (z^{q^{-n}})^{q^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} x^n \log_G(z^{q^{-n}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} t^n * \log_G(z^{q^{-n}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \log_G(t^n * z^{q^{-n}}) \\
&= \log_G(z^{\#}),
\end{aligned}$$

wobei wir die $\mathfrak{o}_E$-Algebrastruktur auf F via $t \mapsto x$ verwenden, sowie die Stetigkeit von $\log_G$ und die Tatsache, dass er ein Homomorphismus $G \to \mathbb{G}_a$ von $\mathfrak{o}_E$-Moduln ist. Nach Lemma 3.1 genügt es zu zeigen, dass die Abbildung $\log_G : \mathfrak{m}_F \to F$ surjektiv ist. Wegen $\log_G'(0) = 1$ existiert eine formale Potenzreihe $\exp_G \in XE[[X]]$ mit

$$\log_G(\exp_G(X)) = \exp_G(\log_G(X)) = X.$$

Offenbar hat die Potenzreihe $t^{-1}\log_G(tX)$ Koeffizienten in $\mathfrak{o}_E$ und niedrigsten Term X. Daher hat auch die bezüglich Komposition inverse Potenzreihe $t^{-1}\exp_G(tX)$ Koeffizienten in $\mathfrak{o}_E$, d.h. $t^{-1}\exp_G(tX)$ konvergiert auf $\mathfrak{m}_F$ und $\exp_G(X)$ konvergiert auf $t\cdot\mathfrak{m}_F = x\mathfrak{m}_F$ und hat Werte in $t\cdot\mathfrak{m}_F = x\mathfrak{m}_F \subseteq \mathfrak{m}_F$. Ist nun $w \in F$, so wähle $m > 0$ hinreichend groß mit $t^m \cdot w = x^m w \in x\mathfrak{o}_F$. Dann konvergiert $\exp_G(t^m \cdot w) \in F$. Nun ist Skalarmultiplikation mit t auf dem $\mathfrak{o}_E$-Modul $G(\mathfrak{o}_{F,x})$ surjektiv. Wie im Beweis von Lemma 3.1 darf man dafür $[t](X)$ als Polynom annehmen, sodass die Aussage aus der algebraischen Abgeschlossenheit von F folgt. Es existiert also $z \in \mathfrak{m}_F$ mit $t^m * z = \exp_G(t^m \cdot w)$ in $\mathfrak{m}_F$. Da Multiplikation mit t^m auf F gleich Multiplikation mit x^m ist, und da $x \neq 0$ gilt, ist $\log_G(z) = w$.

□

Bemerkung 3.3. Versieht man $\mathfrak{m}_F$ mit der $\mathfrak{o}_E$-Modulstruktur $G(\mathfrak{o}_{F,0})$, so ist die Bijektion aus Lemma 2.34 ein Isomorphismus von E-Vektorräumen.

3.2 Erste geometrische Eigenschaften

Wir widmen uns nun wieder der Kurve und würden gerne ein besseres Verständnis für deren geometrische Eigenschaften bekommen. Ein erstes Ziel besteht darin zu zeigen, dass im Fall F algebraisch abgeschlossen für $s \in B^{\varphi=t}\setminus\{0\}$ das abgeschlossene Unterschema $V_+(s) = Proj(P/sP)$ nur aus einem einzigen Punkt besteht, nämlich dem homogenen Primideal $sP \in Proj(P)$.

Außerdem interessieren wir uns für die Struktur des Rings $\mathcal{O}_X(D_+(s))$ der regulären Funktionen außerhalb des Punktes sP. Es stellt sich heraus, dass das ein Dedekindring ist, der kein Körper ist.

Dazu betrachten wir den graduierten Polynomring $F[T] = \bigoplus_{n\geqslant 0} F\cdot T^n$. Die Menge

$$\{f \in F[T] | f(0) \in E\} = E \oplus \bigoplus_{n\geqslant 1} F\cdot T^n$$

ist ein graduierter Unterring. Aus der fundamentalen exakten Sequenz erhalten wir das folgende Ergebnis (vgl. [FF1], Cor. 6.4.3).

Korollar 3.4. *Es sei F algebraisch abgeschlossen, $s \in B^{\varphi=t}\setminus\{0\}$ und $x \in |Y| = \mathfrak{m}_F\setminus\{0\}$ mit $div(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi^n(x)$ (vgl. Satz 2.49(ii)). Setzen wir $P := \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}$, so haben wir einen Isomorphismus*

$$P/sP \cong \{f \in F[t] | f(0) \in E\}$$

graduierter E-Algebren.

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\chi : P \to F[T],\ (b_n)_{n\geqslant 0} \mapsto \sum_{n\geqslant 0}\varphi_x(b_n)T^n,$$

wobei wie vorher $\varphi_x : B \to F$ den Einsetzungshomomorphismus bezüglich x bezeichnet. Da φ_x ein Homomorphismus von E-Algebren ist, ist χ ein Homomorphismus graduierter E-Algebren vom Grad 1. Wegen $s \in \ker(\varphi_x)$ faktorisiert χ durch einen Homomorphismus $P/sP \to F[T]$

graduierter E-Algebren vom Grad 1. Da wir E über φ_x als Unterring von F auffassen, liegt sein Bild offenbar im Unterring $R := \{f \in F[T] | f(0) \in E\}$. Wir zeigen, dass die Abbildung $P/sP \to R$ bijektiv ist.

injektiv: Sei $(b_n)_{n\geqslant 0} \in \ker(\chi)$. Dann ist $b_0 = 0$, denn anderenfalls wäre $b_0 \in E^\times \subseteq B^\times$ und damit $\varphi_x(b_0) \in F^\times$. Sei nun $n \geqslant 1$. Es gilt

$$0 = \chi((b_n)_{n\geqslant 0}) = \sum_{n\geqslant 0} \varphi_x(b_n) T^n$$

und damit $\varphi_x(b_n) = 0$. Schreibe $b_n = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$ mit $s_i \in B^{\varphi=t}$ (vgl. 2.49 (i)). Dann ist $\varphi_x(s_i) = 0$ für ein $1 \leqslant i \leqslant n$. Mithilfe der fundamentalen exakten Sequenz gibt es $\alpha \in E$, so dass $s_i = \alpha \cdot s$, und es folgt $b_n \in sP$. Das zeigt die Injektivität.

surjektiv: Sei $f = \sum_{n\geqslant 0} c_n T^n \in F[T]$ mit $c_0 \in E$. Für $n \geqslant 0$ konstruiere $b_n \in B^{\varphi=t^n}$ mit $\varphi_x(b_n) = c_n$:

$n = 0$: Beachte hierfür nur, dass wir E als Unterkörper von F auffassen via

$$E = B^{\varphi=1} \subseteq B \xrightarrow{\varphi_x} F,$$

und mit $c_0 \in E$ meinen wir, dass c_0 im Bild dieser Abbildung liegt.

$n \geqslant 1$: Die Menge $\{|x^{q^n}| : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist diskret und $|F^\times| \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist dicht, weil F nichttrivial bewertet und perfekt ist. Daher existiert $y \in F^\times$ mit $0 < |y| < 1$ und $|y| \neq |x|^{q^n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wähle $r \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit $div(r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(y)$ (vgl. 2.49 (ii)). Dann ist $div(s) \neq div(r)$, denn sonst gäbe es $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = \varphi^n(x) = x^{q^n}$ und wir hätten $|y| = |x|^{q^n}$. Es folgt $r \notin s \cdot E$ und mit Satz 3.2 somit $\varphi_x(r) \neq 0$. Wieder mithilfe von Satz 3.2 existiert $u \in B^{\varphi=t}$ mit $\varphi_x(u) = \varphi_x(r^{n-1})^{-1} \cdot c_n \in F$. Setzen wir nun $b_n := u \cdot r^{n-1} \in B^{\varphi=t^n}$, so folgt $\varphi_x(b_n) = c_n$. Im Fall $c_n = 0$ wählen wir natürlich $b_n = 0$. Damit liegt das so konstruierte Element $(b_n)_{n\geqslant 0}$ in P und wird unter χ abgebildet auf $\sum_{n\geqslant 0} c_n T^n$. $\square$

Satz 3.5. *Setze $P := \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}$ und sei $s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$.*

(i) (vgl. [FF1], Thm. 6.5.2(3)). Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist $V_+(s) = Proj(P/sP) \subseteq Proj(P) = X$ ein Punkt, nämlich das homogene Primideal $sP \in Proj(P)$.

(ii) $\mathcal{O}_X(D_+(s)) = P_{(s)}$ ist ein Dedekindring, aber kein Körper. Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist $P_{(s)}$ ein Hauptidealring.

Beweis. Nach Korollar 3.4 können wir

$$P/sP = \{f \in F[T] | f(0) \in E\} =: R$$

als graduierte E-Algebren identifizieren, indem wir $x \in \mathfrak{m}_F$ wählen mit $div(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^n(x)$, und E über den Homomorphismus

$$E = B^{\varphi=1} \subseteq B \xrightarrow{\varphi_x} F$$

als Unterkörper von F auffassen.

Sei $\mathfrak{p} \in Spec(R) \setminus \{0\}$ ein homogenes Primideal. Dann gibt es $a \in F^\times$ und $n \geqslant 0$ mit $aT^n \in \mathfrak{p}$. Wäre $n = 0$, so hätten wir $a \in \mathfrak{p} \subseteq R$, also $a \in E^\times$ und damit $\mathfrak{p} = R$. Es gilt also $n > 0$. Wegen $\mathfrak{p} \ni aT^n = aT \cdot T^{n-1}$ folgt dann $aT \in \mathfrak{p}$ oder $T^{n-1} \in \mathfrak{p}$.

Ist $T^{n-1} \in \mathfrak{p}$, so gilt $n \geqslant 2$ wegen $\mathfrak{p} \neq R$. Weil $\mathfrak{p}$ prim ist, folgt daraus $T \in \mathfrak{p}$ und damit $R_+ = TF[T] \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist kein relevantes Primideal.

Ist $aT \in \mathfrak{p}$, so ist $T^2 = aT \cdot a^{-1}T \in \mathfrak{p}$ und damit $T^2F[T] \subseteq \mathfrak{p}$. Für beliebiges $\lambda \in F$ ist dann $(\lambda T)^2 = \lambda^2 T^2 \in \mathfrak{p}$. Weil $\mathfrak{p}$ prim ist, haben wir $\lambda T \in \mathfrak{p}$ für jedes $\lambda \in F$ und insgesamt $R_+ = T^2 \cdot F[T] \oplus T \cdot F \subseteq \mathfrak{p}$, d.h. auch in diesem Fall ist $\mathfrak{p} \notin Proj(R)$. Es folgt $Proj(R) = \{0\}$, sodass $V_+(s) = \{sP\}$ ein einziger Punkt ist.

Wir beweisen Aussage (ii) nur in dem Fall, dass F algebraisch abgeschlossen ist. Der allgemeine Fall verwendet Galoisabstieg (vgl. [FF1], Proposition 7.2.1).

Wir bezeichnen mit $P_{(s)} = \{\frac{f}{s^n} | n \geqslant 0 \text{ und } f \in B^{\varphi = t^n}\}$ die homogene Lokalisierung von P an der Menge $\{s^n | n \geqslant 0\}$. Schreiben wir $f = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$ mit gewissen $s_i \in B^{\varphi=t}$ (vgl. 2.49 (i)), so erhalten wir eine Faktorisierung $\frac{f}{s^n} = \prod_{i=1}^n \frac{s_i}{s}$.

Fixiere $r \in B^{\varphi=t} \setminus s \cdot E$ (vgl. den Beweis von Kor. 3.4). Verknüpfen wir den graduierten Ringhomomorphismus

$$P \to P/rP, \quad f \mapsto \overline{f} := f + rP,$$

mit der kanonischen Abbildung

$$P/rP \to (P/rP)_{\overline{s}},$$

so erhalten wir einen graduierten Ringhomomorphismus

$$P_s \to (P/rP)_{\overline{s}}, \quad \frac{f}{s^n} \mapsto \frac{\overline{f}}{\overline{s}^n}.$$

Er schränkt sich ein zu einem Homomorphismus

$$P_{(s)} \to (P/rP)_{(\overline{s})},$$

dessen Kern das Element $\frac{r}{s} \in P_{(s)}$ enthält. Daher erhalten wir einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$P_{(s)} / \frac{r}{s} P_{(s)} \to (P/rP)_{(\overline{s})}.$$

Wie man anhand der expliziten Abbildungsvorschrift erkennt, ist er surjektiv.

Ist $\frac{\overline{f}}{\overline{s}^n} = 0$ in $(P/rP)_{(\overline{s})} \subseteq (P/rP)_{\overline{s}}$, so existiert $m \geqslant 0$ mit $\overline{s}^m \overline{f} = 0$ in P/rP, d.h. $s^m f \in rP$. Unter Beachtung der Homogenitätsgrade existiert also $g \in B^{\varphi = t^{n+m-1}}$, so dass $s^m f = rg$. Es folgt

$$\frac{f}{s^n} = \frac{s^m f}{s^{n+m}} = \frac{r}{s} \cdot \frac{g}{s^{n+m-1}} \in \frac{r}{s} \cdot P_{(s)}.$$

Das zeigt die Injektivität. Identifizieren wir nun

$$P/rP = Q := \{f \in F[T] | f(0) \in E\},$$

so ist das Element $\overline{s}$ ungleich 0, denn aus $s \in rP$ würde aufgrund der Homogenität $s \in r \cdot E$ folgen. Allerdings war r gerade so gewählt, dass es nicht in $s \cdot E$ liegt. Über die obige Identifikation gilt dann $\overline{s} = a \cdot T$ für ein Element $a \in F^\times$. Betrachte den Ringhomomorphismus

$$Q \to F, \quad h \mapsto h(1).$$

Wegen $\overline{s}(1) = a \neq 0$ setzt er sich fort zu einem Ringhomomorphismus

$$Q_{\overline{s}} \to F,$$

der sich wiederum einschränkt zu einem Homomorphismus

$$Q_{(\overline{s})} \to F, \quad \frac{h}{\overline{s}^n} \mapsto \frac{h(1)}{a^n},$$

wobei $h \in Q$ homogen vom Grad n ist. Er ist injektiv, denn ist $h \in Q$ homogen vom Grad n, so existiert $b \in F$, so dass $h = bT^n$. Aus

$$0 = \frac{h(1)}{a^n} = \frac{b}{a^n}$$

folgt $b = 0$ in F und damit $h = bT^n = 0$ in Q. Für $b \in F$ ist durch $\frac{baT}{\overline{s}} \in Q_{(\overline{s})}$ ein Urbild zu b gegeben. Insgesamt erhalten wir einen Isomorphismus $P_{(s)}/\frac{r}{s}P_{(s)} \cong F$, d.h. $\frac{r}{s}P_{(s)} \in Max(P_{(s)})$.

Sei nun $\mathfrak{p} \in Spec(P_{(s)})\backslash\{0\}$. Wir wählen ein Element $\frac{f}{s^n} \in \mathfrak{p}\backslash\{0\}$ und schreiben $\frac{f}{s^n} = \prod_{i=1}^n \frac{s_i}{s}$ wie zu Beginn dieses Beweises. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, existiert $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\frac{s_i}{s} \in \mathfrak{p}$. Es folgt $\mathfrak{p} = \frac{s_i}{s}P_{(s)}$ aufgrund der Maximalität von $\frac{s_i}{s}P_{(s)}$. Somit ist jedes Primideal von $P_{(s)}$ ein Hauptideal. Daraus folgt durch eine Anwendung des Zornschen Lemmas, dass $P_{(s)}$ ein Hauptidealring ist.

Wie wir bereits gesehen haben, existiert $r \in B^{\varphi=t} \setminus sE$, d.h. $P_{(s)}$ besitzt von Null verschiedene Primideale und ist somit kein Körper. $\square$

Wir sind nun soweit, die grundlegenden geometrischen Eigenschaften der Kurve zu beweisen. Insbesondere wird sich zeigen, dass es sich tatsächlich um eine Kurve handelt.

Satz 3.6. *Sei $P = \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}$ und $X = Proj(P)$.*

(i) Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist X die Vereinigung $X = X_1 \cup X_2$ zweier affiner offener Unterschemata X_1, X_2 mit $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, so dass die Ringe $\mathcal{O}_X(X_i), i = 1, 2$, Hauptidealringe, aber keine Körper sind. Genauer kann man $X_1 = D_+(s)$, $X_2 = D_+(r)$ mit $s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ und $r \in B^{\varphi=t} \setminus sE$ wählen.

(ii) Das E-Schema X ist

- *separiert*
- *quasikompakt*
- *irreduzibel*
- *noethersch*
- *regulär*
- *eindimensional*

(iii) $H^0(X, \mathcal{O}_X) = E$

(iv) Ist F algebraisch abgeschlossen und bezeichnet $|X|$ die Menge der abgeschlossenen Punkte von X, so haben wir Bijektionen

$$\begin{array}{ccccc} |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} & \cong & (B^{\varphi=t} \setminus \{0\})/E^{\times} & \cong & |X| \\ \mathrm{supp}(div(s)) & \mapsfrom & s \cdot E^{\times} & \mapsto & sP \in Proj(P) = X \end{array}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussagen wieder nur in dem Fall, dass F algebraisch abgeschlossen ist und bemerken, dass der Beweis des allgemeinen Falles Galoisabstieg verwendet (vgl. [FF1], Théorème 7.3.3).

(i): Wie im Beweis von 3.5(ii) wählen wir $s, r \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit $r \notin s \cdot E$ und setzen $X_1 := D_+(s), X_2 := D_+(r)$. Dann sind $\mathcal{O}_X(X_1) \cong P_{(s)}$ und $\mathcal{O}_X(X_2) \cong P_{(r)}$ nach 3.5(ii) Hauptidealringe, aber keine Körper. Außerdem gilt $X_1 \cap X_2 = D_+(sr) \cong Spec(P_{(sr)}) \neq \emptyset$, weil P ein Integritätsbereich mit $rs \neq 0$ ist und daher $P_{(sr)}$ ein vom Nullring verschiedener Unterring von P_{sr} ist. Nach 3.5(i) ist $X \setminus D_+(s) = V_+(s)$ der Punkt $sP \in Proj(P)$. Wegen $r \notin s \cdot P$ ist $V_+(s) = \{sP\} \subseteq D_+(r)$ und damit

$$X = D_+(s) \cup V_+(s) = D_+(s) \cup D_+(r) = X_1 \cup X_2.$$

(ii): Beachte, dass $Proj(R)$ für jeden graduierten Ring R separiert ist (vgl. [GW], Prop. 13.5). Alle weiteren Eigenschaften folgen aus (i) unter Verwendung der Tatsache, dass Hauptidealringe regulär noethersch sind.

(iii): In der Notation des Beweises von (i) haben wir aufgrund der Garbenaxiome die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_X(X_1)}_{\cong P_{(s)}} \times \underbrace{\mathcal{O}_X(X_2)}_{\cong P_{(r)}} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_X(X_1 \cap X_2)}_{\cong P_{(rs)}},$$

wobei der rechte Pfeil gegeben ist durch

$$\left(\frac{f}{s^n}, \frac{g}{r^m}\right) \longmapsto \frac{fr^n}{(sr)^n} - \frac{gs^m}{(sr)^m} = \frac{fs^m r^{n+m} - gr^n s^{n+m}}{(sr)^{n+m}}$$

für $f \in P_n = B^{\varphi=t^n}$ und $g \in P_m = B^{\varphi=t^m}$. Das ist genau dann 0, wenn

$$\begin{aligned} & fs^m r^{n+m} = gr^n s^{n+m} && \text{in } P_{2(n+m)} \\ \Leftrightarrow \quad & fr^m = gs^n && \text{in } P_{n+m}. \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung in 2.49(i) folgt daraus $f \in s^n \cdot P$ und $g \in r^m \cdot P$, weil $r \notin s \cdot E$. Aus Gradgründen ist $f \in s^n E$ und $g \in r^m E$, d.h. es gibt $\alpha, \beta \in E$, so dass $f = s^n \alpha$ und $g = r^m \beta$. Es folgt

$$\alpha r^m s^n = fr^m = gs^n = \beta r^m s^n.$$

Weil P nullteilerfrei ist, erhalten wir $\alpha = \beta$, d.h. $(\frac{f}{s^n}, \frac{g}{r^m}) = (\alpha, \alpha)$ liegt im Bild der Abbildung

$$\begin{aligned} E \subseteq \mathcal{O}_X(X) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(X_1) \times \mathcal{O}_X(X_2). \\ f &\longmapsto (f|_{X_1}, f|_{X_2}) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X) = E$.

(iv): Für die linke Bijektion vgl. 2.49(ii).

Für $s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ ist $sP \in |X|$ nach 3.5(i). Die Injektivität von $s \cdot E^\times \mapsto sP$ folgt aus der Eindeutigkeit in 2.49(i). Für die Surjektivität sei $x \in |X|$. Wähle $s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit $x \in D_+(s)$. Dann ist $x = \mathfrak{p}$ ein maximales Ideal des 1-dimensionalen Hauptidealrings $P_{(s)}$ (vgl. 3.5(ii)), sagen wir $\mathfrak{p} = \frac{f}{s^n} P_{(s)}$ für ein $f \in P_n \setminus \{0\}$. Wie wir im Beweis von 3.5(ii) gesehen haben, muss $n = 1$ und damit $f \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ sein, d.h.

$$\mathfrak{p} = \frac{f}{s} P_{(s)} = P_{(s)} \cap f P_s.$$

Das bedeutet genau, dass fP unter dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} D_+(s) = \{\mathfrak{q} \in Proj(P) | s \notin \mathfrak{q}\} &\xrightarrow{\cong} Spec(P_{(s)}) \\ \mathfrak{q} &\longmapsto \mathfrak{q} P_s \cap P_{(s)} \end{aligned}$$

auf $\mathfrak{p}$ abgebildet wird, d.h. $x = fP$, was die Surjektivität zeigt.

□

Bemerkung 3.7. Angenommen, F ist algebraisch abgeschlossen und $x \in |X|$. Wählen wir $s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit $x \in D_+(s)$, so haben wir gesehen, dass x mit einem maximalen Ideal $\frac{f}{s}P_{(s)}$ von $P_{(s)}$ für ein $f \in B^{\varphi=t} \setminus sE$ identifiziert werden kann. Nach dem Beweis von 3.5(ii) ist der Restklassenkörper

$$\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong P_{(s)}/\frac{f}{s}P_{(s)} \cong F$$

algebraisch abgeschlossen und damit unendlichdimensional über $E = k((t))$. Folglich ist das E-Schema X nicht von endlichem Typ. Das ist ein Unterschied zur projektiven Geraden, deren Restklassenkörper an den abgeschlossenen Punkten stets endlichdimensional über dem Grundkörper sind. In diesem Fall ist zudem der Ring $P/sP \cong \{f \in F[T] | f(0) \in E\}$ nicht einmal noethersch. Dazu wählt man $(\beta_n)_{n \geqslant 0}$ in F linear unabhängig über E. Das Ideal von P/sP, das erzeugt wird von den Elementen $\beta_n T, n \geqslant 0$, ist dann nicht endlich erzeugt.

Definition 3.8. Eine *Kurve* ist ein separiertes, irreduzibles, noethersches, reguläres, 1-dimensionales Schema X zusammen mit einer Abbildung $\deg : |X| \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$, wobei $|X|$ die Menge der abgeschlossenen Punkte von X bezeichnet.

Beispiel 3.9. (i) Die Fargues-Fontaine-Kurve $X = X_{E,F}$ mit $\deg(x) = 1$ für alle $x \in |X|$ ist eine Kurve.

(ii) Ist K ein Körper, so ist jedes offene Unterschema $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}^1_K$ mit $\deg(x) = [\kappa(x) : K]$ für alle $x \in |X|$ eine Kurve.

Ist X eine Kurve und $x \in |X|$, so ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein 1-dimensionaler, noetherscher, regulärer lokaler Ring und damit ein diskreter Bewertungsring, d.h. das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x$ ist ein von Null verschiedenes Hauptideal. Wir bezeichnen mit $ord_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$ die zugehörige Bewertung, d.h.

$$ord_x(f) := \begin{cases} \max\{n \geqslant 0 \mid f \in \mathfrak{m}_x^n\} & \text{falls } f \neq 0, \\ \infty & \text{falls } f = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet η den generischen Punkt von X, so hat der Funktionenkörper $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ die Eigenschaft, dass für jeden Punkt $x \in X$ die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$ einen Isomorphismus $Quot(\mathcal{O}_{X,x}) \cong K(X)$ induziert. Unter dieser Identifikation setzt sich ord_x fort zu einer diskreten Bewertung

$$ord_x : K(X)^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$$

via

$$ord_x(\frac{f}{g}) = ord_x(f) - ord_x(g).$$

Definition 3.10. Eine Kurve $(X, \deg)$ heißt *vollständig*, wenn für alle $f \in K(X)^\times$ der Grad

$$\deg(f) := \sum_{x \in |X|} ord_x(f) \cdot \deg(x) \in \mathbb{Z}$$

von f gleich 0 ist.

Bemerkung 3.11. Die obige Summe ist endlich: Da X noethersch und damit insbesondere quasikompakt ist, können wir $X = Spec(R)$ annehmen, wobei R ein noetherscher, 1-dimensionaler

Integritätsbereich ist, so dass der Ring $R_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ regulär und damit ein Hauptidealring ist. Es folgt, dass R Dedekind ist. Wegen $\deg(\frac{f}{g}) = \deg(f) - \deg(g)$ können wir $f \in R \setminus \{0\}$ annehmen. Die allgemeine Theorie der Dedekindringe zeigt, dass es Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ gibt mit $fR = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n$, und für $\mathfrak{p} \in Max(R)$ ist $fR \subseteq \mathfrak{p}$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ für ein $1 \leqslant i \leqslant n$ gilt. Somit gibt es nur endlich viele $\mathfrak{p} \in Max(R) = |Spec(R)|$ mit $ord_\mathfrak{p}(f) \neq 0$.

Proposition 3.12. *(vgl. [FF1], Thm. 6.5.2(1)). Sei F algebraisch abgeschlossen. Die Fargues-Fontaine-Kurve $X = X_{E,F} = Proj(P)$ mit $P = \bigoplus_{n \geqslant 0} B^{\varphi = t^n}$ und $\deg(x) = 1$ für alle $x \in |X|$ ist vollständig.*

Beweis. Der generische Punkt ist $\eta = 0 \in Proj(P)$. Der Funktionenkörper ist damit

$$K(X) = \mathcal{O}_{X,\eta} = P_{(0)} = \{\frac{f}{g} \in Quot(P) \mid f, g \in P \text{ sind homogen vom selben Grad, } g \neq 0\}.$$

Nun ist $\deg(\frac{f}{g}) = \deg(f) - \deg(g)$. Somit genügt es zu zeigen, dass für jedes homogene Element $f \in P_n \setminus \{0\}$ der Grad (im Sinne von Def. 3.10) derselbe ist wie der Grad von f als homogenes Element im graduierten Ring P, d.h. $\deg(f) = n$. Schreibe $f = \prod_{i=1}^d s_i^{n_i}$ mit $s_i \in P_1 \setminus \{0\}$ und $s_i \notin s_j \cdot E$ für alle $i \neq j$. Nach 3.6(iv) sind die entsprechenden Punkte $x_i := s_i P \in |X|$ paarweise verschieden. Sei $x \in |X|$ ein beliebiger Punkt und wähle $s \in P_1 \setminus \{0\}$, so dass $x = sP$. Dann gilt $ord_x(f) \neq 0$ genau dann, wenn $f \in sP$. Mit der Eindeutigkeit in 2.49(i) ist das genau dann der Fall, wenn $s = \alpha s_i$ gilt für ein $\alpha \in E^\times$ und ein $1 \leqslant i \leqslant d$, was wiederum gleichbedeutend mit $x = x_i$ ist. Beachte, dass für $i \neq j$ wegen $s_j \notin s_i E$ aus Gradgründen $s_j \notin s_i P = x_i$ gilt und daher $ord_{x_i}(s_j) = 0$ ist. Wir erhalten

$$ord_{x_i}(f) = \sum_{j=1}^d n_j \cdot ord_{x_i}(s_j) = n_i.$$

Somit ergibt sich für den Grad von f

$$\deg(f) = \sum_{x \in |X|} ord_x(f) \cdot \underbrace{\deg(x)}_{=1} = \sum_{i=1}^d ord_{x_i}(f) = \sum_{i=1}^d n_i = n.$$

□

Bemerkung 3.13. Auch wenn F nicht algebraisch abgeschlossen ist, kann man eine Gradfunktion auf $|X_{E,F}|$ definieren, die $X_{E,F}$ zu einer vollständigen Kurve macht (vgl. [FF1], Théorème 7.3.3(3)).

4 Vektorbündel auf der Kurve

4.1 Die Picardgruppe

Sei $P = \bigoplus_{n\geqslant 0} P_n$ ein graduierter Ring und $X := Proj(P)$. Wir nehmen an, dass das Ideal $P_+ := \bigoplus_{n>0} P_n$ von P von P_1 erzeugt wird.

Für $d \in \mathbb{Z}$ haben wir den graduierten P-Modul $P(d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} P(d)_n$ mit $P(d)_n := P_{n+d}$. Sei $\mathcal{O}_X(d) := \widetilde{P(d)}$ der assoziierte $\mathcal{O}_X$-Modul, der sogenannte *d-te Serre-Twist* der Strukturgarbe. Wegen $P_+ = (P_1)$ ist das ein Geradenbündel: Zunächst ist

$$X = \bigcup_{0\neq f\in P \text{ homogen}} D_+(f) = \bigcup_{0\neq f\in P_1} D_+(f),$$

und für jedes $f \in P_1 \setminus \{0\}$ ist der Homomorphismus

$$\begin{aligned} P_{(f)} &\longrightarrow P(d)_{(f)} = (P_f)_d \\ \frac{r}{f^n} &\longmapsto \frac{rf^d}{f^n} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von $P_{(f)}$-Moduln, also ist

$$\mathcal{O}_X(d)|_{D_+(f)} = \widetilde{P(d)_{(f)}} \cong \widetilde{P_{(f)}} = \mathcal{O}_X|_{D_+(f)}$$

frei vom Rang 1 (vgl. [GW], Prop. 13.15).

Ist F algebraisch abgeschlossen, so können wir diese Konstruktion anwenden auf die Fargues-Fontaine-Kurve $X = Proj(P)$ mit $P = \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}$ (vgl. 2.49(i)). Wir erhalten einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow Pic(X), \quad d \longmapsto [\mathcal{O}_X(d)],$$

unter Verwendung von $\mathcal{O}_X(d + d') \cong \mathcal{O}_X(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d')$ für alle $d, d' \in \mathbb{Z}$ (vgl. [GW], S.374, (13.4.3)).

Satz 4.1. *(vgl. [FF1], Thm. 6.5.2(9)). Sei F algebraisch abgeschlossen. Dann ist der Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to Pic(X)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Beachte, dass $Pic(X)$ isomorph zur Gruppe der Cartier-Divisor-Klassen ist. Dabei assoziiert man zu einem Cartier-Divisor ein Geradenbündel wie folgt: Ist $D = [(X_i, f_i)_{i\in I}]$ ein Cartier-Divisor auf X, d.h. $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ ist eine offene Überdeckung und $f_i \in K(X)^\times$ mit $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)^\times$ für alle $i, j \in I$, so ist das zu D assoziierte Geradenbündel $\mathcal{O}_X(D)$ gegeben durch

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in K(X) \mid \forall i \in I : ff_i \in \mathcal{O}_X(U \cap X_i)\}$$

für $U \subseteq X$ offen. Das Bündel $\mathcal{O}_X(D)$ ist genau dann trivial, wenn D ein prinzipaler Divisor ist (vgl. [GW], Prop. 11.26). Jedes Geradenbündel $\mathcal{L} \in Pic(X)$ ist isomorph zu einem Geradenbündel der Form $\mathcal{O}_X(D)$ für einen Divisor D auf X (vgl. [GW], Prop. 11.27).

Wir wählen nun $r, s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit $r \notin sE^\times$, sodass $X = D_+(r) \cup D_+(s)$ (vgl. 3.6(i)). Setze $X_1 := D_+(r)$, $f_1 = 1$, $X_2 := D_+(s)$, $f_2 = \frac{r}{s}$ und beachte, dass

$$\frac{r}{s} = \frac{r^2}{rs} \in P_{(rs)}^\times = \mathcal{O}_X(X_1 \cap X_2)^\times$$

mit Inversem $\frac{s^2}{sr} = \frac{s}{r}$. Damit definiert $D := [(X_i, f_i^{-n})_{i=1,2}]$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen Divisor auf X.
Schritt 1: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(D)$:
Wegen

$$\mathcal{O}_X(D + D') \cong \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(D')$$

für Cartier-Divisoren D, D' (vgl. [Har], Prop. 6.13(b) oder [GW], (11.12.4), S.302) und wegen

$$n \cdot [(X_i, f_i^{-1})_{i=1,2}] = [(X_i, f_i^{-n})_{i=1,2}]$$

können wir $n = 1$ annehmen. Dann ist

$$\mathcal{O}_X(D)(X_2) = \frac{s}{r} P_{(s)} \subseteq \frac{s}{r} P_{(rs)} = P_{(rs)} = \mathcal{O}_X(D)(X_1 \cap X_2) \supseteq P_{(r)} = \mathcal{O}_X(D)(X_1).$$

Außerdem ist

$$\mathcal{O}_X(1)(X_2) \cong sP_{(s)} \subseteq sP_{(rs)} = \mathcal{O}_X(1)(X_1 \cap X_2) = rP_{(rs)} \supseteq rP_{(r)} = \mathcal{O}_X(1)(X_1).$$

Also liefert Division durch r einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(D)$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln.
Schritt 2: Wir zeigen die Injektivität von $\mathbb{Z} \to Pic(X)$.
Angenommen, wir haben $n \in \mathbb{Z}$ mit $\mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X$. Nach Schritt 1 ist dann $[(X_i, f_i^{-n})_{i=1,2}]$ ein prinzipaler Divisor, d.h. es gibt $f \in K(X)^\times$ mit

$$f \in \mathcal{O}_X(X_1)^\times = P_{(r)}^\times$$

und

$$f \cdot (\frac{s}{r})^{-n} \in \mathcal{O}_X(X_2)^\times = P_{(s)}^\times.$$

Es gilt aber $P_{(r)}^\times = E^\times$: Sind $g_i \in P_{m_i}$ für $i = 1, 2$ mit $\frac{g_1}{r^{m_1}} \cdot \frac{g_2}{r^{m_2}} = 1$ in $P_{(r)}$, so ist $g_1 g_2 = r^{m_1+m_2}$ in P und daher $g_i \in r^{m_i} E^\times$ wegen eindeutiger Faktorisierung (vgl. 2.49(i)). Somit ist $\frac{g_i}{r^{m_i}} \in E^\times$ und die Behauptung folgt. Analog gilt auch $P_{(s)} = E^\times$.
Also ist $(\frac{s}{r})^{-n} \in E^\times$, d.h. $s^{|n|} \in r^{|n|} E^\times$. Es folgt $n = 0$ wegen der eindeutigen Faktorisierung und weil wir $s \notin rE^\times$ angenommen hatten.
Schritt 3: Wir zeigen, dass $\mathbb{Z} \to Pic(X)$ surjektiv ist.
Sei $D = [(U_i, f_i)_{i \in I}]$ ein Cartier-Divisor auf X. Die offenen Unterschemata X_1, X_2 sind Spektren von Hauptidealringen (vgl. 3.5(ii)), ihre Picardgruppen sind also trivial (vgl. [GW], Example 11.42), d.h. jeder Cartier-Divisor auf X_1 bzw. X_2 ist prinzipal. Für $j = 1, 2$ gibt es also $g_j \in K(X)^\times = K(X_j)^\times$ mit $f_i g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap X_j)^\times$ für alle $i \in I$. Wegen $g_1 g_2^{-1} = g_1 f_i^{-1} \cdot f_i g_2^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap X_1 \cap X_2)^\times$ für alle $i \in I$ haben wir $g_1 g_2^{-1} \in \mathcal{O}_X(X_1 \cap X_2)^\times$, und $[(X_i, g_i)_{i=1,2}]$ ist ein wohldefinierter Cartier-Divisor auf X mit $D = [(X_i, g_i)_{i=1,2}]$ nach Konstruktion. Wir behaupten nun

$$\mathcal{O}_X(X_1 \cap X_2)^\times = P_{(rs)}^\times \overset{!}{=} (\frac{s}{r})^{\mathbb{Z}} \cdot E^\times.$$

Seien dafür $g, h \in P_{(rs)}$ mit $gh = 1$. Schreibe $g = \frac{g'}{(rs)^n}$, $h = \frac{h'}{(rs)^m}$ mit $g' \in P_{2n}$, $h' \in P_{2m}$. Indem wir g', h' als Produkt homogener Elemente vom Grad 1 schreiben (vgl. 2.49(i)), können wir $g', h' \notin rsP$ annehmen. Dann ist $g'h' = (rs)^{n+m}$ in P, d.h. $g' = \alpha s^i r^j$ und $h' = \beta s^k r^l$ wegen der Eindeutigkeit in 2.49(i) für gewisse $\alpha, \beta \in E^\times$ und $i, j, k, l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ mit $i + j + k + l = n + m$. Wegen $g', h' \notin rsP$ folgt dann $g' = \alpha s^{n+m}$, $h' = \beta r^{n+m}$ und $n = m$ aus Gradgründen. Es folgt

$$g = \frac{g'}{(rs)^n} = \alpha \frac{s^{2n}}{(rs)^n} = \alpha(\frac{s}{r})^n \in (\frac{s}{r})^{\mathbb{Z}} \cdot E^\times.$$

Das zeigt obige Behauptung.

Wir schreiben nun $g_2 g_1^{-1} = \alpha(\frac{s}{r})^n$ mit $\alpha \in E^\times$, $n \in \mathbb{Z}$ und setzen $D' := [(X, g_1^{-1})]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(D + D') &= \mathcal{O}_X([(X_1, 1), (X_2, \alpha(\frac{s}{r})^n)]) \\ &= \mathcal{O}_X([(X_1, 1), (X_2, (\frac{s}{r})^n)]) \\ &= \mathcal{O}_X(n).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.2. Ist F nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossen, so verhält sich die Picardgruppe anders, denn dann ist die Jacobi-Varietät $Pic^0(X)$ der Divisoren vom Grad 0 modulo prinzipaler Divisoren nicht mehr unbedingt trivial (vgl. [FF2], Theorem 6.4). Aus diesem Grund sind die Dedekindringe der affinen offenen Unterschemata aus Satz 3.5(ii) im Allgemeinen keine Hauptidealringe. In diesem Fall zeigt sich also schon hier ein Unterschied zur projektiven Geraden.

Ist F algebraisch abgeschlossen und K ein Körper, so sind die Schemata $X_{E,F}$ und $\mathbb{P}^1_K$ vollständige Kurven, deren Picardgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist (vgl. 3.6, 3.10, 4.1). Es gibt aber auch in diesem Fall Unterschiede, z.B. verhält sich die Kohomologie der Serre-Twists anders, wie folgende Proposition zeigt:

Proposition 4.3. *Sei F algebraisch abgeschlossen und fixiere $r \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit zugehörigem abgeschlossenen Punkt $x := rP \in |X|$ (vgl. 3.6(iv)). Dann gilt*

(i) $H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = \begin{cases} B^{\varphi=t^d}, & d \geqslant 0, \\ 0, & d < 0. \end{cases}$

(ii) $H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) = \begin{cases} 0, & d \geqslant 0, \\ \mathcal{O}_{X,x}/(\mathfrak{m}_x^{-d} + E), & d < 0. \end{cases}$

(iii) $H^q(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$ *für* $q \geqslant 2$, $d \in \mathbb{Z}$.

Insbesondere ist $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = \kappa(x)/E$ ein unendlichdimensionaler E-Vektorraum.

Beweis. Da X separiert und $\mathcal{O}_X(d)$ quasi-kohärent ist, können wir die Kohomologie mittels Cech-Kohomologie berechnen. Betrachte dazu die Überdeckung $X = D_+(s) \cup D_+(r)$ mit $r, s \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ und $r \notin sE^\times$ wie in 3.6(i). Der zugehörige Cech-Komplex sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow r^d P_{(r)} \times s^d P_{(s)} &\longrightarrow s^d P_{(rs)} = r^d P_{(rs)} \longrightarrow 0 \\ (r^d f, s^d g) &\longmapsto r^d f - s^d g \end{aligned}$$

Es folgt $H^q(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$ für $q \geqslant 2$, $d \in \mathbb{Z}$.

$\underline{q=0}$: Schreibe $f = \frac{f'}{r^n}$, $g = \frac{g'}{s^m}$ mit

$$f' = 0 \text{ oder } f' \in P_n \setminus rP$$

und

$$g' = 0 \text{ oder } g' \in P_n \setminus sP.$$

Dann ist

$$r^d f - s^d g = 0 \text{ in } P_{(rs)} \Leftrightarrow r^d f' s^m = s^d g' r^n \text{ in } K(X). \tag{2}$$

<u>1. Fall</u>: $d < 0$.

Dann ist $s^{m-d} f' \overset{(2)}{=} r^{n-d} g'$ in P. Wären $f', g' \in P\backslash\{0\}$, so hätten wir $d = n \geqslant 0$ wegen $f', s \notin rP$, ein Widerspruch. Es folgt $f' = g' = 0$, also $(r^d f, s^d g) = (0,0)$, d.h. $H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$.

<u>2. Fall</u>: $d \geqslant 0$.

Ist $f' = 0$ oder $g' = 0$, so ist $f' = g' = 0$ nach (2) und $r^d f = s^d g = 0$. Seien also $f', g' \in P \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d = ord_x(r^d) &= ord_x(r^d f' s^m) \quad \text{, da } f', s \notin rP \\ &\overset{(2)}{=} ord_x(s^d g' r^n) \geqslant n \end{aligned}$$

und analog $d \geqslant m$ durch Betrachtung von ord_y mit $y = sP \in |X|$. Es folgt

$$r^{d-n} f' = r^d f \overset{(2)}{=} s^d g = s^{d-m} g' =: h \in P_d.$$

Folglich liegt $(r^d f, s^d g)$ im Bild der Injektion

$$P_d = B^{\varphi = t^d} \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d)), \quad h \longmapsto (h,h) = (r^d \frac{h}{r^d}, s^d \frac{h}{s^d}),$$

d.h. $H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = P_d$.

<u>q=1</u>: Setze $R := P/rP \cong \{f \in F[T] | f(0) \in E\}$. Dann ist das Bild von s in R von der Form aT mit $a \in F^\times$. Beachte $aT \cdot R \supseteq T^2 F[T]$, d.h. $\bigoplus_{n \geqslant 2} P_n \subseteq sP + rP$. Wir benutzen das, um zu beweisen, dass

$$P_{(rs)} = P_{(r)} + P_{(s)} \text{ in } K(X). \tag{3}$$

Sei $\frac{f}{(rs)^n} \in P_{(rs)}$ mit $f \in P_{2n}$. Per Induktion nach $n \geqslant 1$ zeigen wir

$$\frac{f}{(rs)^n} \in \sum_{i=1}^{n} (\frac{P_i}{r^i} + \frac{P_i}{s^i}).$$

$\underline{n=1}$: Dann ist $f \in P_2$ und kann geschrieben werden als $sf_1 + rf_2$ mit $f_i \in P_1$. Es folgt

$$\frac{f}{rs} = \frac{f_1}{r} + \frac{f_2}{s} \in \frac{P_1}{r} + \frac{P_1}{s}.$$

$\underline{n \mapsto n+1}$: Schreibe $f \in P_{2(n+1)}$ als $f = gh$ mit $g \in P_{2n}$, $h \in P_2$ (vgl. 2.49(i)) und $h = sh_1 + rh_2$ mit $h_i \in P_1$ wie oben. Nach Induktionsannahme ist dann

$$\frac{f}{(rs)^{n+1}} = \frac{g}{(rs)^n} \frac{sh_1}{rs} + \frac{g}{(rs)^n} \frac{rh_2}{rs} \in \sum_{i=1}^{n} (\frac{P_i h_1}{r^{i+1}} + \frac{P_i h_2}{s^{i+1}}) + \sum_{i=1}^{n} (\frac{P_i h_1}{s^i r} + \frac{P_i h_2}{r^i s}).$$

Für die zweite Summe rechnen wir

$$\frac{P_i h_1}{s^i r} = \frac{P_i r^{i-1} h_1}{(rs)^i} \in \frac{P_{2i}}{(rs)^i} \stackrel{IA}{\subseteq} \sum_{j=1}^{i} (\frac{P_j}{r^j} + \frac{P_j}{s^j})$$

und analog für $\frac{P_i h_2}{r^i s}$. Das beendet den Induktionsbeweis und zeigt Gleichung (3).
Beachte nun $P_{(s)} \cap P_{(r)} = E$, denn ist $\alpha \in P_{(s)} \cap P_{(r)}$, so wird

$$(\alpha, \alpha) \in P_{(s)} \times P_{(r)} = \mathcal{O}_X(D_+(s)) \times \mathcal{O}_X(D_+(r))$$

auf 0 abgebildet unter der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D_+(s)) \times \mathcal{O}_X(D_+(r)) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(D_+(s) \cap \mathcal{O}_X(D_+(r)) = \mathcal{O}_X(D_+(rs)) = P_{(rs)}, \\ (\beta, \gamma) &\longmapsto \beta - \gamma \end{aligned}$$

ist also ein Element von $\mathcal{O}_X(D_+(s) \cup D_+(r)) = \mathcal{O}_X(X) = E$. Nun berechnen wir die erste Kohomologie wie folgt:

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) &\cong r^d P_{(rs)}/(r^d P_{(r)} + s^d P_{(s)}) \\ &\stackrel{\cdot r^d}{\cong} P_{(rs)}/(P_{(r)} + (\frac{s}{r})^d P_{(s)}) \\ &\stackrel{(3)}{=} P_{(s)}/(P_{(s)} \cap (P_{(r)} + (\frac{s}{r})^d P_{(s)})). \end{aligned}$$

Ist $d \geqslant 0$, so gilt $(\frac{s}{r})^d P_{(s)} \supseteq (\frac{s}{r})^d (\frac{r}{s})^d P_{(s)} = P_{(s)}$, und der Quotient verschwindet. Im Fall $d < 0$ ist $(\frac{s}{r})^d = \frac{r^{-d}}{s^{-d}} \in P_{(s)}$ und somit

$$P_{(s)} \cap (P_{(r)} + (\frac{s}{r})^d P_{(s)}) = (P_{(r)} \cap P_{(s)}) + (\frac{s}{r})^d P_{(s)} = E + (\frac{r}{s})^{-d} P_{(s)}$$

und der Quotient ist $\mathcal{O}_{X,x}/(\mathfrak{m}_x^{-d} + E)$, denn

$$P_{(s)}/(\frac{r}{s})^{-d} P_{(s)} \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{-d},$$

wenn man verwendet, dass $x = rP \in D_+(s)$ zum maximalen Ideal $\frac{r}{s} P_{(s)}$ gehört.
Wie wir bereits gesehen haben, ist $\kappa(x) \cong F$ algebraisch abgeschlossen und daher

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = \kappa(x)/E$$

ein unendlichdimensionaler E-Vektorraum.

□

Bemerkung 4.4. Im Gegensatz dazu ist $H^1(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(-1)) = 0$ für jeden Körper K.

4.2 Klassifikation von Vektorbündeln

Für die Klassifikation der Vektorbündel auf der Kurve geben wir im Folgenden nur einen Überblick. Wir wollen zunächst interessante Vektorbündel konstruieren. Dazu müssen wir untersuchen, wie sich die Kurve bei Änderung des Körpers E verhält. Wir nehmen an, dass F einen algebraischen Abschluss von k enthält. Ist nun $h \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $k_h|k$ die Erweiterung vom Grad

h, so ist $E_h := k_h((t))|k((t)) = E$ die unverzweigte Erweiterung vom Grad h. Wir erhalten die Fargues-Fontaine-Kurve

$$X_{E_h,F} = Proj(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi^h=t^n}).$$

Beachte, dass hier der Frobenius $\varphi^h = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{h-mal} : B \to B$ zur Definition der Kurve verwendet wird, weil damit gerade $B^{\varphi^h=1} = E_h$ gilt und somit $X_{E_h,F}$ zu einem E_h-Schema wird.
Wir wollen die Beziehung zwischen den Kurven $X_{E,F}$ und $X_{E_h,F}$ untersuchen.

Proposition 4.5. *Sei $E_h|E$ die unverzweigte Erweiterung vom Grad h. Dann haben wir einen natürlichen Isomorphismus von E_h-Schemata*

$$X_{E,F} \times_E E_h \xrightarrow{\cong} X_{E_h,F}.$$

Beweis. Wir betrachten auf $B^{\varphi^h=t^{nh}}$ den Endomorphismus $g = \frac{\varphi}{t^n}$. Ist $f \in B^{\varphi^h=t^{nh}}$, so gilt

$$g^h(f) = \frac{\varphi^h(f)}{t^{nh}} = \frac{t^{nh}f}{t^{nh}} = f.$$

Es folgt, dass g auf $B^{\varphi^h=t^{nh}}$ eine endliche Ordnung hat, die h teilt.
Wir erhalten eine Operation der Gruppe

$$G := Gal(E_h|E) = \langle\varphi\rangle$$

auf dem E_h-Vektorraum $B^{\varphi^h=t^{nh}}$, indem φ durch g operiert und allgemeiner φ^i durch $g^i = \frac{\varphi^i}{t^{ni}}$. Diese Operation ist *semilinear* für die natürliche Operation von $G = Gal(E_h|E)$ auf E_h, d.h. für alle $\sigma \in G$, $\alpha \in E_h$ und $f \in B^{\varphi^h=t^{nh}}$ gilt

$$\sigma(\alpha f) = \sigma(\alpha)\sigma(f).$$

Das folgt einfach aus der Multiplikativität von φ auf B. Nach der kohomologischen Version des Satzes von Hilbert 90 (vgl. [Bos], Thm. 4.8/2, S.201) ist jede semilineare Operation einer endlichen Galoisgruppe trivial, d.h. die natürliche E_h-lineare Abbildung

$$(B^{\varphi^h=t^{nh}})^G \otimes_E E_h \longrightarrow B^{\varphi^h=t^{nh}}$$

ist ein Isomorphismus. Hierbei bezeichnet $(\cdot)^G$ die G-Invarianten. Per Definition der G-Operation ist das aber gerade der Eigenraum $B^{\varphi=t^n}$.
Aus diesen Isomorphismen für alle $n \geqslant 0$ erhalten wir einen Isomorphismus graduierter E_h-Algebren

$$\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n} \otimes_E E_h \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi^h=t^{nh}}.$$

Nun wissen wir allgemein, dass für einen graduierten Ring $R = \bigoplus_{n\geqslant 0} R_n$ und eine Ringerweiterung $S|R_0$ stets

$$Proj(R \otimes_{R_0} S) \cong Proj(R) \times_{R_0} S$$

gilt, sofern die Graduierung als $(R \otimes_{R_0} S)_n = R_n \otimes_{R_0} S$ definiert wird (vgl. [Har], Ex. II.5.11, p.125). Wir erhalten also einen Isomorphismus von E_h-Schemata

$$Proj(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi=t^n}) \times_E E_h \xrightarrow{\cong} Proj(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi^h=t^{nh}}).$$

Schreiben wir
$$P := \bigoplus_{n\geqslant 0} P_n := \bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi^h = t^n},$$
so ist der graduierte Ring auf der rechten Seite des obigen Isomorphismus der h-te Veronese-Unterring $P^{(h)} = \bigoplus_{n\geqslant 0} P_{nh}$ von P. Wir wissen, dass P als $P_0 = E_h$-Algebra erzeugt wird von P_1. Daher gilt
$$\mathit{Proj}(P^{(h)}) \cong \mathit{Proj}(P)$$
(vgl. [Har], Ex. 5.13, p.126). Zusammengefasst haben wir einen Isomorphismus von E_h-Schemata
$$X_{E,F} \times_E E_h = \mathit{Proj}(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi = t^n}) \times_E E_h \xrightarrow{\cong} \mathit{Proj}(\bigoplus_{n\geqslant 0} B^{\varphi^h = t^n}) = X_{E_h,F}.$$
□

Bemerkung 4.6. Man kann zeigen, dass der Turm der Kurven $(X_{E_h})_{h\geqslant 1}$ eine verallgemeinerte Riemannsphäre ist (vgl. [FF1], Def. 5.6.21 und Cor. 6.5.3).

Über den oben konstruierten Isomorphismus erhalten wir eine natürliche Projektion
$$\pi_h : X_{E_h,F} \longrightarrow X_{E,F}.$$
Wir schreiben ab jetzt $X := X_{E,F}$ und $X_h := X_{E_h,F}$.
Der obige Isomorphismus zeigt dann, dass $\mathcal{O}_{X_h}$ via π_h lokal frei vom Rang h über $\mathcal{O}_X$ ist: Der Morphismus $\mathit{Spec}(E_h) \to \mathit{Spec}(E)$ ist endlich vom Grad h. Damit ist auch der Basiswechsel $X_{E,F} \times_E E_h \to X_{E,F}$ endlich vom Grad h und daraus folgt, dass $(\pi_h)_*\mathcal{O}_{X_h}$ lokal frei vom Rang h ist. Allgemein folgt dann, dass ein Vektorbündel vom Rang r über X_h ebenfalls lokal frei ist, wenn man es über π_h als $\mathcal{O}_X$-Modul auffasst, und dann Rang rh hat. Die Projektion
$$\pi_h : X_{E_h,F} \longrightarrow X_{E,F}$$
ist eine endliche Galoisüberlagerung von E-Schemata mit Galoisgruppe $\mathit{Gal}(E_h|E) = \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$ (vgl. [GW], Def. 14.82, S. 456).
Wir erinnern an den Formalismus der Harder-Narasimhan-Filtrierung. Für Kurven unseres Typs wird er in [FF1], §5.5 behandelt. Neben dem Rang $\operatorname{rk}\mathcal{E}$ eines Vektorbündels benötigt man dafür auch seinen Grad $\deg\mathcal{E} := \deg(\det\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$. Im Fall der Fargues-Fontaine-Kurve $X = X_{E,F}$ mit algebraisch abgeschlossenem F ist hierbei $\deg : \mathit{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ invers zum Isomorphismus in Satz 4.1.

Definition 4.7. Für ein Vektorbündel $\mathcal{E}$ auf der Kurve X mit $\mathcal{E} \neq 0$ definieren wir
$$\mu(\mathcal{E}) := \frac{\deg\mathcal{E}}{\operatorname{rk}\mathcal{E}} \in \mathbb{R}$$
und nennen diese Zahl den *Harder-Narasimhan-Anstieg* (kurz: *HN-Anstieg*) von $\mathcal{E}$.

Definition 4.8. Ein Vektorbündel $\mathcal{E} \neq 0$ auf einer Kurve X heißt *semistabil*, wenn für alle Untervektorbündel $0 \neq \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$
$$\mu(\mathcal{E}') \leqslant \mu(\mathcal{E}).$$

Wir haben dann das folgende fundamentale Resultat (vgl. [FF1], §5.5.2), dessen klassisches Analogon auf Harder-Narasimhan zurückgeht.

Satz 4.9. *Jedes Vektorbündel $\mathcal{E}$ auf X besitzt eine eindeutige Filtrierung in Untervektorbündel*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneqq \mathcal{E}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathcal{E}_r = \mathcal{E},$$

so dass gilt:

- *für $1 \leqslant i \leqslant r$ ist $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ ein semistabiles Vektorbündel,*
- *die Folge der Anstiege $(\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ ist streng monoton fallend.*

Definition 4.10. Sei $\mathcal{E}$ ein Vektorbündel auf einer Kurve X. Die Filtrierung im vorherigen Satz heißt die *Harder-Narasimhan-Filtrierung* von $\mathcal{E}$.

Wir wollen nun die Vektorbündel definieren, die die zentrale Rolle bei der Klassifikation spielen werden. Sei weiterhin X die Fargues-Fontaine-Kurve und $\pi_h : X_h \to X$ die oben konstruierte Galoisüberlagerung.

Definition 4.11. (i) Für $d \in \mathbb{Z}$ und $h \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ definieren wir

$$\mathcal{O}_X(d,h) := (\pi_h)_* \mathcal{O}_{X_h}(d).$$

(ii) Für $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$ mit $(d,h) = 1$ und $h \geqslant 1$ sei

$$\mathcal{O}_X(\lambda) := \mathcal{O}_X(d,h).$$

Bemerkung 4.12. (i) Da der Morphismus π_h endlich und frei vom Grad h ist, ist $\mathcal{O}_X(d,h)$ lokal frei vom Rang h und vom Grad d.

(ii) Wir haben eine Beschreibung bezüglich graduierter Moduln. Setze

$$M(d,h) := \bigoplus_{i \geqslant 0} B^{\varphi^h = t^{ih+d}}.$$

Dann ist $\mathcal{O}_{X_E}(d,h) = \widetilde{M(d,h)}$, und

$$M(d,h) = \bigoplus_{i \geqslant 0} H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d,h) \otimes \mathcal{O}_{X_E}(i)).$$

Aus Proposition 4.3 und dem Verhalten von Pushforwards unter Kohomologie folgt

Proposition 4.13. *(vgl. [FF1], Prop. 8.2.3). Sei F algebraisch abgeschlossen und fixiere $r \in B^{\varphi=t} \setminus \{0\}$ mit zugehörigem abgeschlossenen Punkt $x := rP \in |X|$ (vgl. 3.6(iv)). Dann gilt*

(i)

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d,h)) = \begin{cases} B^{\varphi^h = t^d}, & d \geqslant 0, \\ 0, & d < 0. \end{cases}$$

(ii)

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(d,h)) = \begin{cases} 0, & d \geqslant 0, \\ \mathcal{O}_{X,x}/(\mathfrak{m}_x^{-d} + E_h), & d < 0. \end{cases}$$

Wir haben den folgenden fundamentalen Satz (vgl. [FF1], Théorème 8.2.10):

Satz 4.14. *Sei F algebraisch abgeschlossen.*

(i) Die semistabilen Vektorbündel mit HN-Anstieg λ über X sind genau die Vektorbündel, die isomorph sind zu einer endlichen direkten Summe der $\mathcal{O}_X(\lambda)$.

(ii) Die Harder-Narasimhan-Filtrierung eines Vektorbündels über X spaltet.

(iii) Die Abbildung

$$\{(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{Q}^n | n \in \mathbb{N}, \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n\} \longrightarrow \{\textit{Isomorphieklassen von Vektorbündeln auf } X\}$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto [\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(\lambda_i)]$$

ist eine Bijektion.

Bemerkung 4.15. Teil (iii) folgt aus (i) und (ii). Außerdem bemerken wir, dass (ii) auch in dem Fall gilt, in dem F nicht algebraisch abgeschlossen ist (vgl. [FF1], Thm. 9.4.1).

Aus dem Klassifikationssatz der Vektorbündel kann man folgendes Resultat folgern (vgl. [FF1], Thm. 8.6.1):

Satz 4.16. *Das Schema X ist einfach zusammenhängend.*

Ist F nicht algebraisch abgeschlossen und $\overline{F}$ ein algebraischer Abschluss von F mit absoluter Galoisgruppe $G_F := Gal(\overline{F}|F)$, so operiert G_F auf der Kurve $X_{\widehat{\overline{F}}}$, und es gibt einen G_F-invarianten Morphismus

$$\alpha : X_{\widehat{\overline{F}}} \longrightarrow X_F$$

mit den folgenden Eigenschaften (vgl. [FF1], nach Lemma 7.7.3):

- Ist $x \in |X_{\widehat{\overline{F}}}|$ ein abgeschlossener Punkt mit unendlichem G_F-Orbit, so ist $\alpha(x)$ der generische Punkt von X_F.
- Bezeichnet $|X_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\text{fin}}$ die Menge der abgeschlossenen Punkte mit endlichem G_F-Orbit, so induziert α eine Bijektion
$$|X_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\text{fin}}/G_F \longrightarrow |X_F|.$$
- Der Grad eines abgeschlossenen Punktes x von X_F ist gleich der Kardinalität von $\alpha^{-1}(x)$.

Wir können somit die Kategorie der G_F-äquivarianten Vektorbündel über $X_{\widehat{\overline{F}}}$ betrachten, wobei eine gewisse Stetigkeitsbedingung an die G_F-Operation gestellt wird, auf die wir nicht weiter eingehen.
Wir erhalten den folgenden Satz im Sinne eines Galoisabstieges (vgl. [FF2], Thm. 6.29):

Satz 4.17. *Der Funktor α^* induziert eine Kategorienäquivalenz*

$$\{Vektorbündel \text{ über } X_F\} \cong \{G_F - \text{ä}quivariante\ Vektorbündel \text{ über } X_{\widehat{\overline{F}}}\}.$$

Bemerkung 4.18. Gemäß Satz 4.14 ist ein Vektorbündel über $X_{\widehat{\overline{F}}}$ genau dann trivial, wenn es semistabil vom Anstieg 0 ist. Aus Satz 4.17 folgt dann, dass die Kategorie der semistabilen Vektorbündel vom Anstieg 0 über X_F äquivalent ist zur Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen von $G_F = Gal(\overline{F}|F)$ mit Koeffizienten in E.

Literatur

[Bos] S. Bosch, *Algebra*, 8. Auflage, Springer, 2013.

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, 1984.

[FF1] L. Fargues, J.-M. Fontaine, *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique*, Astérisque, 2018.

[FF2] L. Fargues, J.-M. Fontaine, *Vector bundles on curves and p-adic hodge theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 51, 2011.

[GW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Vieweg + Teubner Verlag, 2010.

[GH] B. H. Gross, M. J. Hopkins, *Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space*, Contemporary Mathematics, Volume 156, 1994.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.

[Neu] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, 2006.

[Sch] P. Schneider, *Die Theorie des Anstieges*, `https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/pschnei/publ/lectnotes/Theorie-des-Anstiegs.pdf`.

[ST] P. Schneider, J. Teitelbaum, *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*, Invent. Math. 153, 2003.

Versicherung an Eides statt

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die ich wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe, mich auch keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Die Arbeit hat in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum Unterschrift