Bachelorarbeit

Das Affinitätskriterium und der Endlichkeitssatz von Serre

Vorgelegt der
Fakultät der Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

Von:
Alexander Niclas Kutzim
Matr.-Nr. 3031810
Studiengang: Mathematik, B. Sc.

Betreut von:
Prof. Dr. Jan Kohlhaase
Zweitgutachter:
Prof. Dr. Daniel Greb

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Ziel dieser Bachelorarbeit ist es das Affinitätskriterium und den Endlichkeitssatz von Serre zu beweisen und dabei einen Einblick in kohomologische Arbeitsweisen zu liefern. Wir werden dazu viele Resultate aus den Vorlesungen Algebraische Geometrie 1 und 2 und aus dem Seminar Homologische Algebra von Professor Kohlhaase in den Jahren 2017/2018 als gegeben voraussetzen. Wurde etwas nicht in einer dieser beiden Vorlesungen, in dem Seminar oder im Verlauf dieser Bachelorarbeit bewiesen, so kennzeichnen wir den Satz dementsprechend und geben nur eine Referenz an.

Zunächst geben wir kurz einige Begriffe und Resultate der homologischen Algebra an um danach mit der Existenz injektiver Auflösungen von Moduln über beliebigen Ringen zu beginnen (Hierbei sei angemerkt, dass wir unter einem Ring in dieser Arbeit stets einen kommutativen Ring mit Eins verstehen). Daraus folgern wir die entsprechende Aussage für Modulgarben über geringten topologischen Räumen. Anschließend können wir die Kohomologiegruppen von Modulgarben über geringten topologischen Räumen oder allgemeiner von Garben abelscher Gruppen über topologischen Räumen definieren mit denen wir uns in dieser Arbeit beschäftigen wollen.

Nachdem wir die Kohomologiegruppen einer Garbe definiert haben sammeln wir Resultate, die wir für den Beweis des Affinitätskriteriums und des Endlichkeitssatzes benötigen. Dazu beschäftigen wir uns zuerst mit welken Garben. Wir werden zeigen, dass diese azyklisch bezüglich des globalen Schnittfunktors sind, was es uns erlaubt die Kohomologie einer Garbe mittels welker Auflösungen anstatt injektiver Auflösungen zu berechnen. Als weiteres Werkzeug zur Berechnung der Kohomologie von Garben geben wir einen kurzen Überblick zu Čech-Kohomologie. Wir wollen Čech-Kohomologie verwenden um die Kohomologie einer quasi-kohärenten Garbe über einem separierten Schema explizit zu berechnen. Dabei werden wir die wichtigsten Sätze ohne Beweis verwenden.

Im fünften Abschnitt zeigen wir zunächst ein eigenständiges Kriterium für Affinität für separierte Schemata, das wir dann verwenden um das Affinitätskriterium zu beweisen. Dieses besagt, dass der globale Schnittfunktor für ein separiertes und quasi-kompaktes Schema auf den quasi-kohärenten Garben genau dann rechtsexakt ist, wenn das Schema affin ist. Außerdem weisen wir kurz darauf hin wie man das Affinitätskriterium auf quasi-kompakte Schemata erweitern kann, die nicht notwendigerweise separiert sind.

Im Hinblick auf den Endlichkeitssatz beschäftigen wir uns mit kohärenten Garben. Wir werden einige Eigenschaften kohärenter Garben auf lokal noetherschen sowie projektiven Schemata beweisen. Diese verwenden wir dann im letzten Abschnitt um den Endlichkeitssatz für projektive Schemata über einem noetherschen Ring A zu beweisen. Er besagt, dass die Kohomologiegruppen von kohärenten Garben auf einem solchen Schema ab einem gewissen Twist verschwinden und zumindest stets endlich erzeugte A-Moduln sind. Die Aussage, dass die Kohomologiegruppen immer endlich erzeugte A-Moduln sind lässt sich noch auf eigentliche A-Schemata erweitern, was wir aber nur kurz anmerken und nicht explizit beweisen werden.

1 Grundlagen aus der homologischen Algebra

In diesem Abschnitt listen wir einige Resultate aus der homologischen Algebra auf, die wir benötigen werden. Außerdem geben wir einige der wichtigen Begriffe und Definitionen an, wobei wir aber Begriffe wie „exakte Sequenz“ oder Ähnliches als bekannt voraussetzen. Wir orientieren uns in diesem Abschnitt stark an [Har77, S. 202ff, Chapter III.1] und werden auch die Notation aus diesem Kapitel übernehmen. Alle Aussagen in diesem Abschnitt lassen sich auf beliebige *abelsche Kategorien* erweitern, aber wir werden nur benötigen, dass alle Konstruktionen und Definitionen in den folgenden vier Kategorien funktionieren:

(i) $\mathfrak{Ab}$, die Kategorie der abelschen Gruppen

(ii) $\mathfrak{Mod}(A)$, die Kategorie der Moduln über einem Ring A

(iii) $\mathfrak{Ab}(X)$, die Kategorie der Garben abelscher Gruppen über einem topologischen Raum X

(iv) $\mathfrak{Mod}(X)$, die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln über einem geringten topologischen Raum X

Definition 1.1. Es sei $\mathfrak{A}$ eine der obigen vier Kategorien. Ein *Komplex* $A^\bullet$ in $\mathfrak{A}$ ist eine Familie $(A^p, d^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Objekten $A^p \in Ob(\mathfrak{A})$ und Morphismen $d^p : A^p \to A^{p+1}$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$, so dass $d^{p+1} \circ d^p = 0$ (kurz: $d^2 = 0$). Wir schreiben meistens nur d und nennen die Abbildung d das *Differential* des Komplexes. Sind die Objekte nur in einem Bereich $p_0 \leq p \leq p_1$ definiert, so setzen wir $A^p = 0$ für jedes andere p.
Das *p-te Kohomologieobjekt* eines Komplexes $A^\bullet$ ist der Quotient

$$h^p(A^\bullet) = ker(d^p)/im(d^{p-1})$$

Seien $A^\bullet$ und $B^\bullet$ zwei Komplexe in $\mathfrak{A}$ mit Differentialen d_A und d_B. Ein *Morphismus* von Komplexen $f : A^\bullet \to B^\bullet$ ist eine Familie von Morphismen $(f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit $f^p : A^p \to B^p$, so dass $f^{p+1} \circ d_A^p = d_B^p \circ f^p$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$. Wir sagen auch, dass f *mit den Differentialen kommutiert.* Ist $f : A^\bullet \to B^\bullet$ ein Morphismus von Komplexen, so liefert die universelle Eigenschaft des Quotienten für jedes $p \in \mathbb{Z}$ einen Morphismus zwischen den Kohomologieobjekten der Komplexe

$$h^p(f) : h^p(A^\bullet) \longrightarrow h^p(B^\bullet), \qquad a + im(d_A^{p-1}) \longmapsto f^p(a) + im(d_B^{p-1})$$

Eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in $\mathfrak{A}$

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

ist eine Familie von Morphismen von Komplexen, so dass für jedes $p \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$0 \longrightarrow A^p \longrightarrow B^p \longrightarrow C^p \longrightarrow 0$$

exakt ist. Haben wir solch eine kurze exakte Sequenz von Komplexen in $\mathfrak{A}$, so existieren natürliche Abbildungen $\delta^p : h^p(C^\bullet) \to h^{p+1}(A^\bullet)$ und eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow h^p(A^\bullet) \longrightarrow h^p(B^\bullet) \longrightarrow h^p(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} h^{p+1}(A^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Wir nennen diese Sequenz die *lange exakte Kohomologiesequenz.* Die Existenz der δ ist letztlich eine Verallgemeinerung des Schlangenlemmas.

Zwei Morphismen von Komplexen $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ heißen *homotop*, falls eine Familie von Morphismen $k^p : A^p \to B^{p-1}$, $p \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $f^p - g^p = d_B^{p-1} \circ k^p + k^{p+1} \circ d_A^p$ für jedes $p \in \mathbb{Z}$ (kurz: $f - g = dk + kd$). Die Definition von Homotopie zeigt, dass zwei homotope Morphismen f, g für jedes $p \in \mathbb{Z}$ dieselbe Abbildung $h^p(A^\bullet) \to h^p(B^\bullet)$ zwischen den Kohomologieobjekten induzieren.

Sei $\mathfrak{B}$ eine weitere der oben erwähnten Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ heißt *additiv*, falls für alle $A, A' \in \mathfrak{A}$ die induzierte Abbildung zwischen den Morphismengruppen $Hom(A, A') \to Hom(F(A), F(A'))$ ein Gruppenhomomorphismus ist. F heißt *linksexakt*, falls F additiv ist und falls für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in $\mathfrak{A}$ die Sequenz $0 \to F(A') \to F(A) \to F(A'')$ in $\mathfrak{B}$ exakt ist. Können wir anstatt links die 0 rechts schreiben, so heißt F *rechtsexakt.* Ist F sowohl links- als auch rechtsexakt, so sagen wir nur F ist *exakt.* Für einen kontravarianten Funktor definieren wir exakt bzw. rechts- oder linksexakt analog. Für ein fixiertes Objekt $A \in \mathfrak{A}$ ist in den obigen vier Beispielen für $\mathfrak{A}$ der Funktor $B \mapsto Hom_{\mathfrak{A}}(A, B)$, notiert als $Hom_{\mathfrak{A}}(A, -)$, kovariant und linksexakt und der Funktor $Hom_{\mathfrak{A}}(-, A)$ ist kontravariant und linksexakt.

Ein Objekt $I \in \mathfrak{A}$ heißt *injektiv*, falls $Hom(-, I)$ ein exakter Funktor ist. Eine *injektive Auflösung* eines Objektes $A \in \mathfrak{A}$ ist ein Komplex $I^\bullet$, definiert für $p \geq 0$, zusammen mit einem Morphismus $\epsilon : A \to I^0$, so dass I^p für jedes $p \geq 0$ injektiv ist und so dass die folgende Sequenz exakt ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

Wir sagen $\mathfrak{A}$ besitzt *genügend viele injektive Objekte*, falls jedes Objekt von $\mathfrak{A}$ sich in ein injektives Objekt von $\mathfrak{A}$ einbetten lässt. In diesem Fall besitzt auch jedes Objekt $A \in \mathfrak{A}$ eine injektive Auflösung, denn man kann zunächst A in ein injektives Objekt einbetten und danach den Kokern dieser Abbildung wieder in ein injektives Objekt einbetten und so weiter.

Schließlich sei $\mathfrak{A}$ eine Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten und $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein kovarianter linksexakter Funktor. Wir definieren die *rechtsabgeleiteten Funktoren* R^pF, $p \geq 0$, von F indem wir zu jedem Objekt $A \in \mathfrak{A}$ eine injektive Auflösung $I^\bullet$ wählen und $R^pF(A) = h^p(F(I^\bullet))$ setzen.

Satz 1.2. Angenommen $\mathfrak{A}$ bestitzt genügend viele injektive Objekte. Es sei $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein kovarianter linksexakter Funktor in eine abelsche Kategorie $\mathfrak{B}$. Es gelten:

(i) Für jedes $p \geq 0$ ist R^pF wie oben definiert ein additiver Funktor $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Desweiteren ist R^pF bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl der injektiven Auflösung

(ii) In natürlicher Weise gilt $R^0F \cong F$

(iii) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in $\mathfrak{A}$ und jedes $p \geq 0$ gibt es einen natürlichen Morphismus $\delta^p : R^pF(A'') \to R^{p+1}F(A')$ und eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \longrightarrow R^pF(A) \longrightarrow R^pF(A'') \xrightarrow{\delta^p} R^{p+1}F(A') \longrightarrow \dots$$

Beweis. Vergleiche [Har77, S.204f, Theorem 1.1A]. □

Definition 1.3. Sei $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ wie im letzten Satz. Ein Objekt $J \in \mathfrak{A}$ heißt *F-azyklisch*, falls $R^pF(J) = 0$ für alle $p \geq 1$.

Proposition 1.4. Sei $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ wie zuvor und $A \in \mathfrak{A}$ ein Objekt. Eine *F-azyklische Auflösung* von A ist eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^0 \longrightarrow J^1 \longrightarrow \dots$$

so dass J^p azyklisch ist für jedes $p \geq 0$. Wir haben dann für jedes $p \geq 0$ einen natürlichen Isomorphismus $R^pF(A) \cong h^p(F(J^\bullet))$.

Beweis. Vergleiche [Har77, S. 205, Proposition 1.2A]; das ergibt sich induktiv sofort aus Betrachtung der langen exakten Kohomologiesequenzen zu $0 \to A \to J^0 \to J^0/A \to 0$ etc. □

Bemerkung. Jedes injektive Objekt $I \in \mathfrak{A}$ ist F-azyklisch, denn eine injektive Auflösung von I ist durch $0 \to I \to I \to 0$ gegeben und Anwenden von F erhält die Exaktheit dieser Sequenz. Das bedeutet F-azyklisch ist eine deutlich schwächere Bedingung als injektiv. Die letzte Proposition ist daher für das Arbeiten mit Kohomologiegruppen extrem wichtig, da es häufig deutlich einfacher ist eine F-azyklische Auflösung eines Objekts zu finden bzw. zu zeigen, dass ein Objekt F-azyklisch ist. Im Beweis des Endlichkeitssatzes werden wir beispielsweise eine Auflösung konstruieren, die offensichtlich azyklisch, aber möglicherweise keine injektive Auflösung ist.

2 Existenz injektiver Auflösungen

Da wir injektive Auflösungen benötigen um rechtsabgeleitete Funktoren zu definieren ist unser erstes Ziel die Existenz injektiver Auflösungen von Modulgarben über geringten topologischen Räumen zu zeigen.

2.1 Injektive Auflösungen von Moduln

Zunächst zeigen wir die Existenz injektiver Auflösungen von Moduln über einem beliebigen Ring A. Die Strategie ist die entsprechende Aussage zunächst für $\mathbb{Z}$ zu zeigen und dann aus injektiven $\mathbb{Z}$-Moduln injektive A-Moduln zu machen.

Proposition 2.1. Für einen A-Modul I sind äquivalent:

(i) I ist injektiv

(ii) für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ lässt sich jede A-lineare Abbildung $\mathfrak{a} \to I$ zu einer A-linearen Abbildung $A \to I$ fortsetzen

Falls A ein Hauptidealring ist sind (i) und (ii) zusätzlich äquivalent zu

(iii) I ist *divisibel*, das heißt zu jedem $a \in A \setminus \{0\}$ und $x \in I$ existiert ein $x' \in I$ so dass $x = ax'$. Anders ausgedrückt: Für jedes $a \in A \setminus \{0\}$ ist Multiplikation mit a surjektiv

Beweis. (vgl. [Bos13, S. 183f, Proposition 5])
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Wende die Injektivität von I auf die Injektion $\mathfrak{a} \to A$ an.
(ii) $\Longrightarrow$ (i). Gegeben seien eine Injektion $M' \to M$ und eine A-lineare Abbildung $f' : M' \to I$. Wir müssen zeigen, dass f' sich zu einer A-linearen Abbildung $f : M \to I$ fortsetzen lässt. Betrachte dazu die Menge Z aller Paare $(\widetilde{M}, \tilde{f})$, wo $\widetilde{M} \subseteq M$ ein Untermodul von M ist der M' enthält und $\tilde{f}$ eine Fortsetzung von f' ist. Wir haben eine partielle Ordnung $\leq$ via $(\widetilde{M}, \tilde{f}) \leq (\widetilde{N}, \tilde{g})$ genau dann, wenn $\widetilde{M} \subseteq \widetilde{N}$ und $\tilde{g}|_{\widetilde{M}} = \tilde{f}$. Offensichtlich gilt $(M', f') \in Z$, also ist Z nicht leer. Weiter ist Z induktiv geordnet, denn für jede total geordnete Teilmenge ist die Vereinigung der Untermoduln von M und Verklebung der Fortsetzungen von f' eine obere Schranke. Nach Zorn's Lemma existiert also ein maximales Element $(\overline{M}, \overline{f})$. Angenommen wir haben $y \in M \setminus \overline{M}$. Wir wollen zeigen, dass sich $\overline{f}$ auf einen Modul fortsetzen lässt, der $\overline{M}$ enthält. Betrachte dazu das wie folgt definierte Ideal von A

$$\mathfrak{a} = \{a \in A \mid ay \in \overline{M}\}$$

Offensichtlich gilt $\overline{M} \cap Ay = \mathfrak{a}y$. Nach Voraussetzung lässt sich die A-lineare Abbildung

$$\mathfrak{a} \longrightarrow I, \qquad a \longmapsto \overline{f}(ay)$$

zu einer A-linearen Abbildung $\tilde{g} : A \to I$ fortsetzen. Setzen wir $x = \tilde{g}(1)$, so gilt

$$ax = a\tilde{g}(1) = \tilde{g}(a) = \overline{f}(ay)$$

für jedes $a \in \mathfrak{a}$. Ist $a \in A$ mit $ay = 0$, so folgt $a \in \mathfrak{a}$, da $0 \in \overline{M}$. Daraus folgt nun $ax = \overline{f}(ay) = 0$. Das zeigt die Wohldefiniertheit der folgenden A-linearen Abbildung

$$g : Ay \longrightarrow I, \qquad ay \longmapsto ax$$

Außerdem stimmt g nach der letzten Rechnung auf $\overline{M} \cap Ay = \mathfrak{a}y$ mit $\overline{f}$ überein. Also lässt sich $\overline{f}$ zu einer A-linearen Abbildung

$$f : \overline{M} + Ay \longrightarrow I, \qquad z + ay \longmapsto \overline{f}(z) + g(ay)$$

fortsetzen. Da offensichtlich $\overline{M} \subsetneq \overline{M} + Ay$ im Widerspruch zur Maximalität von $\overline{M}$ bleibt zu zeigen, dass f wohldefiniert ist. Seien $z, z' \in \overline{M}$ und $a, a' \in A$ mit $z + ay = z' + a'y$. Es gilt $z - z' = (a' - a)y \in \overline{M} \cap Ry = \mathfrak{a}y$ und daher

$$\begin{aligned}(\overline{f}(z) + g(ay)) - (\overline{f}(z') + g(a'y)) &= \overline{f}(z - z') - \overline{f}((a - a')y) \\ &= \overline{f}(z - z') - g(z - z') = 0\end{aligned}$$

Damit haben wir unseren Widerspruch zur Existenz eines solchen y und es folgt $\overline{M} = M$. Also ist I injektiv.
Sei nun A ein Hauptidealring. Wir zeigen die Äquivalenz von (ii) und (iii). Für die Implikation (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sei $a \in A \setminus \{0\}$. Wir setzen $\mathfrak{a} = (a)$ und betrachten die A-lineare Abbildung

$$f' : \mathfrak{a} \longrightarrow I, \qquad ra \longmapsto rx$$

Diese ist wohldefiniert, da A ein Integritätsbereich ist. Nach (ii) lässt sich nun f' zu einer A-linearen Abbildung $f : A \to I$ fortsetzen und $x' = f(1) \in I$ liefert das in (iii) gesuchte Element, denn $ax' = af(1) = f(a) = f'(a) = x$. Für die ungekehrte Implikation betrachte ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A. Da A ein Hauptidealring ist haben wir $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in A$. Sei nun $f' : (a) \to I$ eine A-lineare Abbildung. Diese ist wegen A-Linearität zwangsläufig von der Form $ra \mapsto rx$ mit $x = f'(1)$. Um f' zu einer A-linearen Abbildung $A \to I$ fortzusetzen können wir außerdem annehmen, dass $a \neq 0$, denn in dem Fall wäre $f = 0$ schon eine Fortsetzung von f'. Da I nach Voraussetzung divisibel ist existiert dann ein $x' \in I$ mit $x = ax'$ und die A-lineare Abbildung

$$f : R \longrightarrow I, \qquad r \longmapsto rx'$$

liefert eine Fortsetzung von f', denn $f'(ra) = rx = rax' = f(ra)$. $\square$

Bemerkung. $\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul offensichtlich divisibel, also injektiv. Ebenso erhält man die Injektivität von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Da außerdem beliebige Produkte injektiver Moduln injektiv sind erhält man auch die Injektivität von $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^X$ für beliebige Indexmengen X. Damit können wir sofort zeigen, dass die Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln genügend viele injektive Objekte besitzt.

Korollar 2.2. $\mathfrak{Mod}(\mathbb{Z}) = \mathfrak{Ab}$ besitzt genügend viele injektive Objekte.

Beweis. (vgl. [Bos13, S. 185, Corollary 7])
Wir können ohne Einschränkungen von $M \neq 0$ ausgehen, da der Nullmodul bereits injektiv ist. Für jedes $y \in M \setminus \{0\}$ betrachten wir den Untermodul $\mathbb{Z}y \subseteq M$ von M. Dies ist eine nicht-triviale zyklische Gruppe also gilt $\mathbb{Z}y \cong \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}y \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n > 1$. Wähle eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{Z}y \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad zy \longmapsto zu$$

wobei $u \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ die Restklasse von $\frac{1}{n}$ ist, falls $\mathbb{Z}y \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $u \neq 0$ beliebig gewählt werden kann falls $\mathbb{Z}y \cong \mathbb{Z}$. Mit der Injektivität von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ lässt sich $\mathbb{Z}y \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu einer $\mathbb{Z}$-linearen Abbildung $\varphi_y : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ fortsetzen. Betrachte die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow \prod_{y \in M\setminus\{0\}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad z \longmapsto (\varphi_y(z))_{y \in M\setminus\{0\}}$$

Der Modul auf der rechten Seite ist nach der letzten Bemerkung injektiv und die angegebene Abbildung ist injektiv, da $\varphi_y(y) \neq 0$ für alle $y \in M \setminus \{0\}$. □

Bemerkung. Ziel ist es nun die Aussage des Korollars auf einen beliebigen Ring A zu erweitern. Für einen A-Modul M und eine abelsche Gruppe G, aufgefasst als $\mathbb{Z}$-Modul, hat die Menge $Hom_{\mathbb{Z}}(M, G)$ eine natürliche Struktur eines A-Moduls. Für $a \in A$ und $\varphi \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, G)$ definieren wir dafür die Abbildung $a \cdot \varphi$ durch $(a \cdot \varphi)(m) = \varphi(am)$ für jedes $m \in M$.

Lemma 2.3. Wir haben einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\Phi : Hom_A(M, Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M, G)$$

indem wir $\varphi \in Hom_A(M, Hom_{\mathbb{Z}}(A, G))$ auf $(y \mapsto \varphi(y)(1))$ abbilden.

Beweis. (vgl. [Bos13, S.185f, Lemma 8])
Die angegebene Abbildung ist offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus. Wir zeigen, dass die Umkehrabbildung durch die folgende gegeben ist:

$$\Psi : Hom_{\mathbb{Z}}(M, G) \ni \psi \longmapsto (y \mapsto (a \mapsto \psi(ay)))$$

Dass rechts tatsächlich eine A-lineare Abbildung $M \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ steht, rechnet man einfach nach. Auch dass Φ und Ψ invers zueinander sind, ist eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} \varphi &\xmapsto{\Phi} (y \mapsto \varphi(y)(1)) \\ &\xmapsto{\Psi} (y \mapsto (a \mapsto \varphi(ay)(1))) = \varphi \end{aligned}$$

Dabei verwendet man in der zweiten Zeile $(\varphi(ay))(1) = (a \cdot \varphi(y))(1) = \varphi(y)(a)$ und daher $(y \mapsto (a \mapsto \varphi(y)(a))) = (y \mapsto \varphi(y)) = \varphi$. Andersrum gilt

$$\begin{aligned} \psi &\xmapsto{\Psi} (y \mapsto (a \mapsto \psi(ay))) \\ &\xmapsto{\Phi} (y \mapsto \psi(y)) = \psi \end{aligned}$$

Das zeigt, dass Φ und Ψ invers zueinander sind. □

Lemma 2.4. Ist G eine abelsche Gruppe, welche als $\mathbb{Z}$-Modul injektiv ist, so ist $E = Hom_{\mathbb{Z}}(A, G)$ ein injektiver A-Modul.

Beweis. (vgl. [Bos13, S. 186, Lemma 9])
Sei $\iota : M' \to M$ eine Injektion von A-Moduln und $f : M' \to E$ eine A-lineare Abbildung. Nach dem letzten Lemma entspricht f einer $\mathbb{Z}$-linearen Abbildung $f' : M' \to G$. Da G injektiv ist gibt es eine Fortsetzung zu einer $\mathbb{Z}$-linearen Abbildung $\overline{f'} : M \to G$, welche wiederum nach obigem Lemma einer A-linearen Abbildung $\overline{f} : M \to E$ entspricht. Da $\overline{f'}$ eine Fortsetzung von f' ist und Φ aus dem letzten Lemma ein Gruppenisomorphismus ist sehen wir, dass $\overline{f}$ eine Fortsetzung von f ist. Das zeigt, dass E injektiv ist. □

Lemma 2.5. $\mathfrak{Mod}(A)$ besitzt genügend viele injektive Objekte.

Beweis. (vgl. [Bos13, S. 183, Lemma 4])
Der Beweis ist prinzipiell derselbe wie in Korollar 2.2. Zusätzlich verwenden wir hier aber noch die letzten beiden Lemmata. Wir wählen eine auf y nicht verschwindende $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\mathbb{Z}y \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ für jedes $y \in M\backslash\{0\}$ und setzen diese mit der Injektivität von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu einer $\mathbb{Z}$-linearen Abbildung $M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ fort. Lemma 2.3 liefert dann A-lineare Abbildungen $\varphi_y : M \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ für jedes $y \in M\backslash\{0\}$. Diese erfüllen wie die Abbildungen im Beweis des Korollars $\varphi_y(y) \neq 0$. Wir betrachten die A-lineare Abbildung

$$M \longrightarrow \prod_{y \in M\backslash\{0\}} Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \qquad z \longmapsto (\varphi_y(z))_{y \in M\backslash\{0\}}$$

Diese ist injektiv und $\prod_{y \in M\backslash\{0\}} Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist injektiv, da die Faktoren $Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ alle nach dem letzten Lemma injektiv sind. □

2.2 Injektive Auflösungen von Garben

Im weiteren Verlauf der Arbeit sei, sofern nichts anderes angenommen wird, X stets ein geringter topologischer Raum. Mit den Resultaten aus dem letzten Unterabschnitt können wir nun sofort zeigen, dass die Kategorie $\mathfrak{Mod}(X)$ bzw. $\mathfrak{Ab}(X)$ genügend viele injektive Objekte besitzt. Außerdem beweisen wir an dieser Stelle eine nützliche Tatsache über den induktiven Limes, da wir diese häufiger verwenden werden. Wir arbeiten dabei in einer fest gewählten, aber nicht näher spezifizierten, Kategorie in der induktive Limites existieren.

Lemma 2.6. Wir erinnern uns, dass eine Menge I mit einer Präordnung $\leq$ *gerichtet* genannt wird, falls zu je zwei Elementen $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert, so dass $i \leq k$ und $j \leq k$. Ein *induktives System über* I ist eine Familie $(X_i, \varphi_{ij})_{i \leq j}$ von Objekten X_i und Morphismen $\varphi_{ij} : X_i \to X_j$ für je zwei Elemente $i, j \in I$ mit $i \leq j$, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\forall i \in I : \varphi_{ii} = id_{X_i}$

(b) $\forall i, j, k \in I$ mit $i \leq j \leq k : \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$

Sei nun $(X_i, \varphi_{ij})_{i \leq j}$ ein induktives System über einer gerichteten Menge I. Besitzt I ein maximales Element i_0, so ist dieses eindeutig bestimmt und der kanonische Morphismus $\iota_{i_0} : X_{i_0} \to \varinjlim_{i \in I} X_i$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass i_0 eindeutig ist. Ist also i' ein weiteres maximales Element, so gibt es, da I gerichtet ist, ein $k \in I$ mit $i_0 \leq k$ und $i' \leq k$. Da sowohl i_0 als auch i' maximal sind folgt $i_0 = k$ und $i' = k$ und damit $i_0 = i'$. Also ist das maximale Element wie behauptet eindeutig bestimmt. Ist nun $j \in I$, so existiert ein $k \in I$ mit $j \leq k$ und $i_0 \leq k$. Wegen Maximalität von i_0 folgt $k = i_0$, also $j \leq i_0$. Da $(X_i, \varphi_{ij})_{i \leq j}$ ein induktives System über I ist existiert also $f_j = \phi_{ji_0} : X_j \to X_{i_0}$. Diese Morphismen erfüllen $f_j \circ \varphi_{kj} = \varphi_{ji_0} \circ \varphi_{kj} = \varphi_{ki_0} = f_k$ für alle $k, j \in I$ mit $k \leq j$ per Definition eines induktiven Systems. Die universelle Eigenschaft des induktiven Limes liefert nun einen eindeutig bestimmten Morphismus $f : \varinjlim_i X_i \to X_{i_0}$ mit $f \circ \iota_j = f_j$ für alle $j \in I$. Es bleibt zu zeigen, dass dieser invers zu ι_{i_0} ist. Einerseits gilt $f \circ \iota_{i_0} = f_{i_0} = \varphi_{i_0 i_0} = id_{X_{i_0}}$. Andererseits ist $id_{\varinjlim_i X_i}$ der eindeutige Morphismus, der das folgende Diagramm für alle $j \in I$ kommutativ macht

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r] \arrow[dr] & \varinjlim_i X_i \arrow[d] \\ & \varinjlim_i X_i \end{tikzcd}$$

Es gilt aber $(\iota_{i_0} \circ f) \circ \iota_j = \iota_{i_0} \circ f_j = \iota_{i_0} \circ \varphi_{ji_0} = \iota_j$. Also macht $\iota_{i_0} \circ f$ das obige Diagramm ebenfalls kommutativ. Wegen Eindeutigkeit folgt daraus $\iota_{i_0} \circ f = id_{\varinjlim_i X_i}$. □

Proposition 2.7. $\mathfrak{Mod}(X)$ besitzt genügend viele injektive Objekte. a

Beweis. (vgl. [Har77, S. 207, Prop. 2.2])
Sei $\mathcal{F}$ ein beliebiger $\mathcal{O}_X$-Modul. Für jedes $x \in X$ können wir den Halm $\mathcal{F}_x$ in einen injektiven $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul I_x einbetten. Wir betrachten I_x als Garbe auf der einelementigen Menge $\{x\}$ via $I_x(\{x\}) = I_x$ und $I_x(\varnothing) = 0$ und bezeichnen die Inklusion $\{x\} \to X$ mit j. Um den Beweis abzuschließen zeigen wir, dass der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathscr{I} = \prod_{x \in X} j_* I_x$ injektiv ist. Hier bezeichnet j_* wie üblich den pushforward entlang j. Wir haben also

$$(j_* I_x)(U) = \begin{cases} I_x & , \quad x \in U \\ 0 & , \quad x \notin U \end{cases}$$

Da alle Übergangsabbildungen in den entsprechenden induktiven Systemen Isomorphismen sind, erhalten wir für die Halme

$$(j_* I_x)_z = \begin{cases} I_x & , \quad z = x \\ 0 & , \quad z \neq x \end{cases}$$

Zunächst haben wir $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathscr{I}) = \prod_{x \in X} Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_* I_x)$, was direkt aus der entsprechenden Aussage für Moduln über Ringen folgt. Betrachte die folgenden beiden Abbildungen von Mengen

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_* I_x) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x)$$

Hier ist Φ die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi_x$ und Ψ bildet eine $\mathcal{O}_{X,x}$-lineare Abbildung $\psi : \mathcal{G}_x \to j_* I_x$ auf $\Psi(\psi)$ ab mit

$$\Psi(\psi)_U = \begin{cases} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{can.} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi} I_x = (j_* I_x)(U) & , \quad x \in U \\ \mathcal{G}(U) \longrightarrow 0 = (j_* I_x)(U) & , \quad x \notin U \end{cases}$$

für $U \subseteq X$ offen. Nun ist einerseits φ_x eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft für jede offene Umgebung U von x in X das folgende Diagramm kommutativ zu machen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "can."] & (j_* I_x)(U) = I_x \arrow[d, "can."] \\ \mathcal{G}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & (j_* I_x)_x = I_x \end{tikzcd}$$

und andererseits ist $\varphi_z = 0$ falls $z \neq x$, da $(j_* I_x)_z = 0$ für $z \neq x$. Mit beidem zusammen erkennt man, dass Φ und Ψ invers zueinander sind. Mit allem zusammen können wir nun $Hom_{\mathcal{O}_X}(-, \mathscr{I})$ als Verknüpfung von Funktoren verstehen

$$\mathcal{G} \longmapsto \prod_{x \in X} \mathcal{G}_x \longmapsto \prod_{x \in X} Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{G}_x, I_x) = Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathscr{I})$$

Da die einzelnen Funktoren alle exakt sind folgt, dass auch $Hom_{\mathcal{O}_X}(-, \mathscr{I})$ exakt ist. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathscr{I}$ injektiv ist. Wählen wir $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, so erhalten wir aus den Abbildungen $\mathcal{F}_x \to I_x$ einen Morphismus $\mathcal{F} \to \mathscr{I}$. Dieser ist injektiv, da er per Konstruktion auf allen Halmen injektiv ist. Damit haben wir die gewünschte Einbettung von $\mathcal{F}$ in einen injektiven $\mathcal{O}_X$-Modul. $\square$

Bemerkung. Ist X ein topologischer Raum, so können wir $\mathcal{O}_X$ als die konstante Garbe von Ringen $\mathbb{Z}$ wählen. Da jede abelsche Gruppe ein $\mathbb{Z}$-Modul ist liefert uns die Proposition also auch direkt, dass $\mathfrak{Ab}(X) = \mathfrak{Mod}(X)$ genügend viele injektive Objekte besitzt.

3 Kohomologiegruppen von Garben

Wir haben nun die Existenz injektiver Auflösungen von Garben abelscher Gruppen über topologischen Räumen bzw. Modulgarben über geringten topologischen Räumen gezeigt. Daher können wir jetzt ohne Bedenken über ihre Kohomologiegruppen sprechen. Zusätzlich beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit welken Garben, deren Eigenschaften wir aber erst im letzten Kapitel für den Beweis des Endlichkeitssatzes brauchen werden. Schon hier werden wir welke Garben allerdings verwenden, um zu zeigen, dass die Kohomologiegruppen eines $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$ unabhängig davon sind, ob man sie mit injektiven Auflösungen in $\mathfrak{Mod}(X)$ berechnet, oder ob man $\mathcal{F}$ als Objekt von $\mathfrak{Ab}(X)$ auffasst und injektive Auflösungen dort verwendet (vgl. Bemerkung am Ende dieses Abschnitts).

Definition 3.1. Der globale Schnittfunktor $\Gamma(X,-) : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$ ist bekanntlich kovariant und linksexakt. Wir definieren die *Kohomologiefunktoren* $H^p(X,-)$, $p \geq 0$, als die rechtsabgeleiteten Funktoren von $\Gamma(X,-)$, das heißt $H^p(X,-) = R^p\Gamma(X,-)$. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X, so nennen wir die abelsche Gruppe $H^p(X,\mathcal{F})$ die *p-te Kohomologiegruppe* von $\mathcal{F}$.

Definition 3.2. Eine Garbe abelscher Gruppen $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt *welk* (fr. *flasque*, engl. *flabby*), falls für jede Inklusion $V \subseteq U$ offener Mengen die Restriktionsabbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ surjektiv ist.

Bemerkung. Wie man sich leicht klarmacht ist die Definition äquivalent dazu, dass Schnitte über beliebigen offenen Mengen sich zu globalen Schnitten fortsetzen lassen. Das heißt es genügt, dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Restriktion $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ surjektiv ist.

Beispiel. (1) Sei G eine abelsche Gruppe und $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann ist die Wolkenkratzergarbe in x mit Wert G welk, denn die Restriktionen sind entweder die Identität von G oder die Nullabbildung, also in jedem Fall surjektiv.
(2) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ eine welke Garbe abelscher Gruppen auf X. Sind $V, U \subseteq Y$ offene Teilmengen mit $V \subseteq U$, so ist die Restriktionsabbildung $(f_*\mathcal{F})(U) \to (f_*\mathcal{F})(V)$ per Definition von f_* durch die Restriktion $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ gegeben. Diese ist aber surjektiv, da $\mathcal{F}$ welk ist. Also ist $f_*\mathcal{F}$ ebenfalls welk.

Lemma 3.3. Jeder injektive $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathscr{I}$ ist welk.

Beweis. (vgl. [Har77, S. 207, Lemma 2.4])
Seien $U, V \subseteq X$ offen mit $V \subseteq U$. Bezeichne mit j (bzw. i) die offene Immersion $U \to X$ (bzw. $V \to X$). Wir führen zunächst den *lower shriek* Funktor $j_!$ ein. Für einen $\mathcal{O}_U$-Modul $\mathcal{F}$ definieren wir den $\mathcal{O}_X$-Modul $j_!\mathcal{F}$ als Garbifizierung der Prägarbe

$$(j_!\mathcal{F})^{pre}(W) = \begin{cases} \mathcal{F}(W) & , \quad W \subseteq U \\ 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

Da die Halme der Garbifizierung denen der Prägarbe entsprechen (vgl. [GW10, S. 52, Proposition 2.24 (1)]) erhalten wir

$$(j_!\mathcal{F})_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & , \quad x \in U \\ 0 & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

Das rechtfertigt auch die alternative Bezeichnung von $j_!\mathcal{F}$ als Fortsetzung von $\mathcal{F}$ durch 0 außerhalb von U. Per Definition haben wir eine natürliche Inklusion $(i_!\mathcal{O}_V)^{pre} \to (j_!\mathcal{O}_U)^{pre}$. Durch Garbifizieren erhalten wir eine Inklusion $i_!\mathcal{O}_V \to j_!\mathcal{O}_U$. Auf diese wenden wir $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathscr{I})$ an und erhalten eine surjektive Abbildung $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, j^*\mathscr{I}) \to \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, i^*\mathscr{I})$, da $\mathscr{I}$ injektiv ist. An dieser Stelle verwenden wir - ohne Beweis -, dass $j_!$ (bzw. $i_!$) linksadjungiert zu j^* (bzw. i^*) ist (vgl. [AGV71, Expose 4, Proposition 11.3.1]). Wir haben also $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{O}_U, \mathscr{I}) = \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, j^*\mathscr{I})$. Weiter können wir zeigen, dass j^* in diesem Fall einfach die Restriktion auf U ist. Dazu erinnern wir uns, dass $j^*\mathscr{I}$ als das Tensorprodukt $\mathcal{O}_U \otimes_{j^{-1}\mathcal{O}_X} j^{-1}\mathscr{I}$ definiert ist (vgl. [Har77, S. 110]). Wir müssen also nur zeigen, dass j^{-1} in diesem Fall die Restriktion auf U ist. Nun ist $j^{-1}\mathscr{I}$ definiert als die Garbifizierung der Prägarbe $(j^{-1}\mathscr{I})^{pre}(W) = \varinjlim_{W' \supseteq j(W)} \mathscr{I}(W')$. Hier ist j aber eine offene Immersion, also ist $j(W) = W \subseteq X$ offen. Lemma 2.6 zeigt daher, dass $\varinjlim_{W' \supseteq j(W)} \mathscr{I}(W')$ einfach $\mathscr{I}(W)$ ist. Damit ist $(j^{-1}\mathscr{I})^{pre} = \mathscr{I}|_U$ bereits eine Garbe und wir können uns das Garbifizieren sparen. Ebenso erhält man $j^{-1}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_U$. Damit ist $j^*\mathscr{I} = \mathscr{I}|_U$ wie behauptet die Restriktion von $\mathscr{I}$ auf U ist. Wir haben also $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{O}_U, \mathscr{I}) = \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathscr{I}|_U)$. Zu guter letzt haben wir noch einen Isomorphismus von $\mathcal{O}_U$-Moduln

$$\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathscr{I}|_U) \longrightarrow \mathscr{I}(U)$$

indem wir einen Morphismus φ auf $\varphi_U(1_{\mathcal{O}_U(U)})$ abbilden. Offensichtlich entspricht das auf den Halmen dem bekannten Isomorphismus

$$\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathscr{I}_x) \longrightarrow \mathscr{I}_x$$

Um den Beweis abzuschließen betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathscr{I}|_U) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, \mathscr{I}|_V) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathscr{I}(U) \arrow[r] & \mathscr{I}(V) \end{tikzcd}$$

Der obere Morphismus ist surjektiv, da es bis auf Isomorphie der Morphismus $\mathit{Hom}_{\mathcal{O}_X}(j_!\mathcal{O}_U, \mathscr{I}) \to \mathit{Hom}_{\mathcal{O}_X}(i_!\mathcal{O}_V, \mathscr{I})$ ist. Außerdem überzeugt man sich davon, dass das Diagramm kommutativ ist. Demnach ist auch die Restriktion $\mathscr{I}(U) \to \mathscr{I}(V)$ surjektiv und $\mathscr{I}$ ist wie gewünscht welk. □

Lemma 3.4. Sei $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X. Es gelten:

(i) Ist $\mathcal{F}'$ welk, so ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Sequenz $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to 0$ exakt

(ii) Sind sowohl $\mathcal{F}'$ als auch $\mathcal{F}$ welk, so ist $\mathcal{F}''$ ebenfalls welk. Mit anderen Worten Quotienten welker Garben nach welken Untergarben sind welk.

Beweis. (vgl. [CK03, Lemma 2.12/13])
(i) Die Sequenz $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to 0$ ist bekanntlich links und in der Mitte immer exakt. Wir müssen also nur die Exaktheit auf der rechten Seite überprüfen. Bezeichnen wir den Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ mit φ, so ist also zu zeigen, dass φ_U surjektiv ist. Da φ nach Voraussetzung surjektiv ist, gibt es zu jedem $s \in \mathcal{F}''(U)$ eine offene Überdeckung $(U_i)_i$ von U, sowie eine Familie von Schnitten $(g_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$, so dass $\varphi_{U_i}(g_i) = s|_{U_i}$ für alle i (vgl. [GW10, S. 52]). Betrachte die Menge Z aller Paare (V, f), wo $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge von U ist und $\varphi_V(f) = s|_V$. Wir haben eine partielle Ordnung $\leq$ definiert durch $(V, f) \leq (W, g)$ genau dann, wenn $V \subseteq W$ und $g|_V = f$. Die Surjektivität von φ garantiert, dass Z nicht leer ist. Außerdem ist Z induktiv geordnet, denn offensichtlich bildet die Vereinigung der Mengen und Verklebung der Schnitte für eine total geordnete Teilmenge eine obere Schranke. Bezeichne mit (V_0, f_0) ein maximales Element von Z. Wir wollen die Annahme $V_0 \neq U$ zu einem Widerspruch führen. Da φ surjektiv ist gibt es eine offene, nichtleere Teilmenge $V_1 \not\subseteq V_0$ von U und $f_1 \in \mathcal{F}(V_1)$ mit $s|_{V_1} = \varphi_{V_1}(f_1)$. Wir haben also $\varphi_{V_0 \cap V_1}(f_0) = s|_{V_0 \cap V_1} = \varphi_{V_0 \cap V_1}(f_1)$. Das heißt auf $V_0 \cap V_1$ unterscheidet sich f_1 von f_0 durch ein Element aus dem Kern von $\mathcal{F}(V_0 \cap V_1) \to \mathcal{F}''(V_0 \cap V_1)$. Wegen Exaktheit in der Mitte ist das gerade das Bild von $\mathcal{F}'(V_0 \cap V_1) \to \mathcal{F}(V_0 \cap V_1)$. Wir bezeichnen den Morphismus $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ mit ψ. Es gibt dann ein $g \in \mathcal{F}'(V_0 \cap V_1)$ mit $\psi_{V_0 \cap V_1}(g) = (f_0 - f_1)|_{V_0 \cap V_1}$. Da $\mathcal{F}'$ welk ist, lässt sich dieses Element zu einem Element $\tilde{g} \in \mathcal{F}'(V_1)$ erweitern. Ersetzen wir f_1 durch $f_1 + \psi_{V_1}(\tilde{g})$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(f_1 + \psi_{V_1}(\tilde{g}))|_{V_0 \cap V_1} &= f_1|_{V_0 \cap V_1} + \psi_{V_1}(\tilde{g})|_{V_0 \cap V_1} \\ &= f_1|_{V_0 \cap V_1} + \psi_{V_0 \cap V_1}(\tilde{g}|_{V_0 \cap V_1}) \\ &= f_1|_{V_0 \cap V_1} + \psi_{V_0 \cap V_1}(g) = f_0|_{V_0 \cap V_1}\end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist würde das aber bedeuten, dass wir f_0 und f_1 zu einem Element $\tilde{f} \in \mathcal{F}(V_0 \cup V_1)$ verkleben können, welches per Konstruktion $\psi_{V_0 \cup V_1}(\tilde{f}) = s|_{V_0 \cup V_1}$ erfüllt. Das widerspricht der Maximalität von (V_0, f_0). Es muss also $V_0 = U$ gelten und φ_U ist surjektiv.
(ii) Seien $U, V \subseteq X$ offen mit $V \subseteq U$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(U) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}''(V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die vertikalen Pfeile sind die jeweiligen Restriktionsabbildungen und die Zeilen sind nach (i) exakt, da $\mathcal{F}'$ welk ist. Weiter ist auch der linke vertikale Pfeil surjektiv, da auch $\mathcal{F}$ welk ist. Dann ist aber wegen der Kommutativität auch der rechte vertikale Pfeil surjektiv, also ist $\mathcal{F}''$ ebenfalls welk. $\square$

Proposition 3.5. Ist $\mathcal{F}$ eine welke Garbe, so gilt $H^p(X,\mathcal{F}) = 0$ für jedes $p \geq 1$.

Beweis. (vgl. [Har77, S. 208, Proposition 2.5])
Wir wählen eine Einbettung $\mathcal{F} \to \mathscr{I}$ von $\mathcal{F}$ in eine injektive Garbe $\mathscr{I} \in \mathfrak{Ab}(X)$ und bezeichnen den Quotienten $\mathscr{I}/\mathcal{F}$ mit $\mathcal{G}$. Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

Nach Teil (i) des letzten Lemmas ist die Sequenz zwischen den globalen Schnitten $0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathscr{I}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to 0$ wieder exakt, da $\mathcal{F}$ welk ist. Das bedeutet $ker(\Gamma(X,\mathcal{G}) \to 0) = im(\Gamma(X,\mathscr{I}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}))$ und daher per Definition $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$. Weiter haben wir $H^p(X,\mathscr{I}) = 0$ für $p \geq 1$, da $\mathscr{I}$ injektiv ist. Die lange exakte Kohomologiesequenz impliziert daher für $p \geq 2$ die Exaktheit der Teilsequenz $0 \to H^{p-1}(X,\mathcal{G}) \to H^p(X,\mathcal{F}) \to 0$, also $H^p(X,\mathcal{F}) \cong H^{p-1}(X,\mathcal{G})$. Nun ist sowohl $\mathcal{F}$ als auch $\mathscr{I}$ welk nach Lemma 3.3 angewandt auf den geringten Raum X mit der konstanten Strukturgarbe $\mathbb{Z}$. Teil (ii) des letzten Lemmas impliziert daher, dass auch $\mathcal{G}$ welk ist. Ersetzen wir also im Beginn dieses Beweises $\mathcal{F}$ durch $\mathcal{G}$, so erhalten wir mit denselben Argumenten $0 = H^1(X,\mathcal{G}) = H^2(X,\mathcal{F})$. Die Aussage der Proposition folgt nun per Induktion über p. $\square$

Bemerkung. Die Proposition besagt, dass welke Garben $\Gamma(X,-)$-azyklisch sind. Wir können daher nach Proposition 1.4 die Kohomologie einer Garbe durch welke Auflösungen berechnen. Insbesondere erhalten wir die folgende Proposition.

Proposition 3.6. Die rechtsabgeleiteten Funktoren des globalen Schnittfunktors $\Gamma(X,-) : \mathfrak{Mod}(X) \to \mathfrak{Ab}$ stimmen mit den zu Beginn dieses Abschnitts definierten Kohomologiefunktoren überein.

Beweis. (vgl. [Har77, S. 208, Proposition 2.6])
Betrachten wir $\Gamma(X,-)$ als Funktor von $\mathfrak{Mod}(X)$ nach $\mathfrak{Ab}$, so berechnen wir die rechtsabgeleiteten Funktoren indem wir injektive Auflösungen in $\mathfrak{Mod}(X)$ nehmen. Aber injektive $\mathcal{O}_X$-Moduln sind welke Garben abelscher Gruppen und diese sind azyklisch nach Lemma 3.3 und Proposition 3.5. Die Proposition folgt daher aus Proposition 1.4. $\square$

Bemerkung. Setze $A = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ hat $\Gamma(X,\mathcal{F})$ eine natürliche Struktur eines A-Moduls. Da wir die Kohomologiegruppen von $\mathcal{F}$ in $\mathfrak{Mod}(X)$ berechnen können haben diese also alle die Struktur eines A-Moduls. Beispielsweise ist die lange exakte Kohomologiesequenz also eine exakte Sequenz von A-Moduln und so weiter.

4 Čech-Kohomologie

Als letztes wichtiges Werkzeug behandeln wir Čech-Kohomologie. Wir werden die Beweise der wichtigsten Sätze auslassen und nur die allgemeine Definition und einige kleinere Beweise machen. Ziel ist es später mit Čech-Kohomologie die Kohomologiegruppen von quasi-kohärenten Garben über separierten Schemata explizit berechnen zu können.

4.1 Alternierende und geordnete Koketten

Definition 4.1. Sei A ein Ring und $\mathcal{F}$ eine Garbe von A-Moduln über X. Weiter sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine feste offene Überdeckung von X. Für jedes $p \geq 0$ und jedes $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ schreiben wir $U_{i_0 \dots i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$. Eine *p-Kokette* ist ein Element des A-Moduls

$$\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$$

Für $f \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ und $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ bezeichnen wir mit $f_{i_0 \dots i_p}$ den Eintrag von f an der Stelle $(i_0, \dots, i_p)$. Wir sagen f ist *alternierend*, falls $f_{i_0 \dots i_p} = 0$ ist wann immer zwei Indizes gleich sind und falls für jede Permutation σ der Indizes $f_{\sigma(i_0) \dots \sigma(i_p)} = sgn(\sigma) f_{i_0 \dots i_p}$ gilt (NB: Da jede Permutation ein endliches Produkt von Transpositionen ist genügt es die zweite Eigenschaft nur für Transpositionen zu fordern). Die alternierenden p-Koketten bilden offensichtlich einen A-Untermodul von $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, den wir mit $\check{C}^p_{alt}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ bezeichnen. Besitzt I weiter eine totale Ordnung, so definieren wir den A-Modul der *geordneten* p-Koketten als

$$\check{C}^p_{ord}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_p})$$

Für $f \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definieren wir eine Abbildung von A-Moduln

$$\check{d}^p : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

durch die Vorschrift

$$\check{d}^p(f)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{r=0}^{p+1} (-1)^r \, f_{i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_{p+1}} \Big|_{U_{i_0 \dots i_{p+1}}}$$

Wir werden die Restriktion auf $U_{i_0 \dots i_{p+1}}$ der Übersicht halber meistens weglassen und wieder nur $\check{d}$ statt $\check{d}^p$ schreiben. Eine direkte Rechnung zeigt, dass $\check{d}^2 = 0$: Für $f \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ haben wir

$$\check{d}(f)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{r=0}^{p+1} (-1)^r f_{i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_{p+1}}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\check{d}^2(f)_{i_0\dots i_{p+2}} &= \sum_{s=0}^{p+2}(-1)^s \check{d}(f)_{i_0\dots\hat{i}_s\dots i_{p+2}} \\
&= \sum_{r<s}(-1)^{r+s} f_{i_0\dots\hat{i}_r\dots\hat{i}_s\dots i_{p+2}} \\
&+ \sum_{s<r}(-1)^{r+s+1} f_{i_0\dots\hat{i}_s\dots\hat{i}_r\dots i_{p+2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Das bedeutet die A-Moduln $\check{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ für $p \geq 0$, zusammen mit den Abbildungen $\check{d}^p : \check{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ bilden einen Komplex im Sinne des ersten Abschnitts, den *Čech-Komplex*. Wir bezeichnen diesen Komplex mit $\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$. Ist f alternierend, so überzeugt man sich davon, dass $\check{d}(f)$ ebenfalls alternierend ist. Wir betrachten eine Transposition $\sigma = (i_k\ i_l)$ (mit $k < l$), wo $(-1)^r f_{\sigma(i_0)\dots\widehat{\sigma(i_r)}\dots\sigma(i_p)} = (-1)^r f_{i_0\dots i_l\dots\hat{i}_r\dots i_k\dots i_p}$. Es sind drei Fälle zu unterscheiden. Ist $r = k$, so haben wir

$$(-1)^k f_{i_0\dots\hat{i}_l\dots i_k\dots i_p} = (-1)^k(-1)^{l-k+1} f_{i_0\dots i_k\dots\hat{i}_l\dots i_p} = -(-1)^l f_{i_0\dots i_k\dots\hat{i}_l\dots i_p}$$

Analog haben wir im Fall $r = l$ dann

$$(-1)^l f_{i_0\dots i_l\dots\hat{i}_r\dots i_k\dots i_p} = -(-1)^k f_{i_0\dots\hat{i}_k\dots i_l\dots i_p}$$

In allen anderen Fällen werden Indizes vertauscht die nicht ausgelassen werden, also haben wir einfach

$$(-1)^r f_{i_0\dots i_l\dots\hat{i}_r\dots i_k\dots i_p} = -(-1)^r f_{i_0\dots i_k\dots\hat{i}_r\dots i_l\dots i_p}$$

Summiert man alles auf, so erhält man

$$\begin{aligned}
\check{d}(f)_{\sigma(i_0)\dots\sigma(i_{p+1})} &= \sum_{r=0}^{p+1}(-1)^r f_{\sigma(i_0)\dots\widehat{\sigma(i_r)}\dots\sigma(i_{p+1})} \\
&= -\check{d}(f)_{i_0\dots i_p} = sgn(\sigma)\check{d}(f)_{i_0\dots i_p}
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $\check{d}(f)_{i_0\dots i_{p+1}} = 0$ gilt wann immer zwei Indizes gleich sind können wir nach eben gezeigtem von $i_0 = i_1$ ausgehen indem wir gegebenenfalls Indizes vertauschen. Insbesondere gilt dann $f_{i_0\dots\hat{i}_k\dots i_{p+1}} = 0$ für $k \neq 0, 1$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\check{d}(f)_{i_0\dots i_{p+1}} &= \sum_{r=0}^{p+1}(-1)^r f_{i_0\dots\hat{i}_k\dots i_{p+1}} \\
&= (-1)^0 f_{i_1\dots i_{p+1}} + (-1)^1 f_{i_0 i_2\dots i_{p+1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Das bedeutet $\check{d}$ schränkt sich auf eine Abbildung $\check{d}'$ zwischen den alternierenden Koketten ein. Wir erhalten also einen weiteren Komplex, den wir mit $\check{C}^\bullet_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ bezeichnen. Weiter schränkt sich $\check{d}$ auch auf eine Abbildung $\check{d}''$ zwischen den geordneten Koketten ein. Wir schreiben $\check{C}^\bullet_{ord}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ für den geordneten Čech-Komplex. Schließlich definieren wir $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ als das p-te Kohomologieobjekt des Komplexes $\check{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Proposition 4.2. Die Notation sei wie in der vorigen Definition. Dann stimmt $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ mit dem p-ten Kohomologieobjekt des Komplexes $\check{C}^\bullet_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ überein. Ist I total geordnet, so stimmt $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ auch mit dem p-ten Kohomologieobjekt des geordneten Komplexes überein.

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 180f, Proposition 2.3 & Corollary 2.4])
Wir zeigen nur die zweite Aussage der Proposition. Betrachte die Projektion $\check{C}^p_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^p_{ord}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ auf die Koordinaten $i_0,\dots,i_p$ mit $i_0 < ... < i_p$. Das ist ein Morphismus, der offensichtlich mit den Differentialen kommutiert. Für die Injektivität sei $f \in \check{C}^p_{alt}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ eine alternierende p-Kokette, die auf die 0 abgebildet wird. Das bedeutet $f_{i_0\dots i_p} = 0$ für alle $i_0 < ... < i_p$. Nun ist aber f alternierend, also $f_{i_0\dots i_p} = 0$ wann immer zwei Indizes gleich sind. Sind andererseits die Indizes $i_0,\dots,i_p$ paarweise verschieden, so existiert eine Permutation σ mit $\sigma(i_0) < ... < \sigma(i_p)$, da I total geordnet ist. Es folgt $f_{i_0\dots i_p} = sgn(\sigma)^{-1} f_{\sigma(i_0)\dots\sigma(i_p)} = 0$ und damit $f = 0$. Für die Surjektivität sei f eine geordnete p-Kokette. Sind die Indizes $i_0,\dots,i_p$ paarweise verschieden, so setzen wir $f_{i_0\dots i_p} = sgn(\sigma)^{-1} f_{\sigma(i_0)\dots\sigma(i_p)}$ mit σ wie oben. Anderenfalls setzen wir $f_{i_0\dots i_p} = 0$. Das ergibt eine alternierende p-Kokette wie gewünscht. Der Morphismus ist also ein Isomorphismus der mit den Differentialen kommutiert und induziert daher einen Isomorphismus zwischen den Kohomologieobjekten. □

Bemerkung. Die Definition des Differentials $\check{d}$ erscheint auf den ersten Blick recht willkürlich. Tatsächlich setzt dies aber in natürlicher Weise einen bekannten Komplex fort. Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von X und bezeichnet U deren Vereinigung, so ist nach Garbenaxiomen die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\check{d}^{-1}} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\check{d}^0} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij}) \tag{1}$$

exakt. Hier ist $\check{d}^{-1} : f \mapsto (f|_{U_i})_i$ und $\check{d}^0 : (f_i)_i \mapsto (f_i|_{U_{ij}} - f_j|_{U_{ij}})_{i,j}$. Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, so sieht man, dass das der Abbildung $\check{d}^0$ aus der vorigen Definition entspricht. Insbesondere erhält man die folgende Proposition.

Proposition 4.3. Für jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X haben wir $\check{H}^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 181, Proposition 2.6])
$\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ ist der Kern von $\check{d}^0$. Die Proposition folgt also direkt aus der Bemerkung. □

4.2 Übergang zu einer Verfeinerung

Den nächsten Schritt können wir uns prinzipiell sparen, da wir nur mit affinen offenen Überdeckungen und quasi-kohärenten Garben auf separierten Schemata arbeiten werden. Der Richtigkeit halber wollen wir aber zumindest kurz über Verfeinerungen von offenen Überdeckungen sprechen.

Definition 4.4. Wir nennen eine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ von X eine *Verfeinerung* einer anderen offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, falls eine Abbildung $\sigma : J \to I$ existiert, so dass $V_j \subseteq U_{\sigma(j)}$ für alle $j \in J$. Daraus erhalten wir $V_{j_0 \dots j_p} \subseteq U_{\sigma(j_0)\dots\sigma(j_p)}$, was die Wohldefiniertheit des folgenden Homomorphismus sichert. Wir erhalten einen Homomorphismus zwischen den Čech-Komplexen, welchen wir ebenfalls σ nennen mit

$$\sigma^p : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

definiert durch

$$\sigma^p(f)_{j_0 \dots j_p} = f_{\sigma(j_0)\dots\sigma(j_p)}\big|_{V_{j_0 \cdots j_p}}$$

Dass σ mit den Differentialen kommutiert rechnet man einfach nach. Wir erhalten also einen Homomorphismus zwischen den Kohomologiegruppen

$$\sigma^* : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

Lemma 4.5. Der Homomorphismus σ^* hängt nicht von der Wahl von σ ab.

Beweis. Vergleiche [Liu02, S. 182, Lemma 2.8]. □

Korollar 4.6. Ist $\mathcal{U}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$, so ist $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ ein Isomorphismus.

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 182, Corollary 2.9])
Wir verwenden die Notation aus der Definition. Ist $\mathcal{U}$ eine Verfeinerung einer offenen Überdeckung $\mathcal{W}$ mit einer Abbildung τ, so dass $U_i \subseteq W_{\tau(i)}$, dann ist $\mathcal{V}$ ebenfalls eine Verfeinerung von $\mathcal{W}$, denn $V_j \subseteq U_{\sigma(j)} \subseteq W_{(\tau\circ\sigma)(j)}$. Weiter gilt offensichtlich $(\tau \circ \sigma)^* = \tau^* \circ \sigma^*$, da die Abbildung $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ nach der universellen Eigenschaft des Quotienten eindeutig bestimmt ist. Wähle nun $\mathcal{W} = \mathcal{V}$. Nach dem letzten Lemma stimmt $\tau^* \circ \sigma^*$ mit id_J^* überein. Das bedeutet τ^* ist injektiv und σ^* ist surjektiv. Wegen Symmetrie ist dann τ^* ebenfalls surjektiv, also ein Isomorphismus. □

Die Verfeinerungseigenschaft definiert offensichtlich eine Präordnung auf den offenen Überdeckungen von X. Je zwei offene Überdeckungen $(U_i)_{i\in I}$,$(V_j)_{j\in J}$ besitzen außerdem eine gemeinsame Verfeinerung, nämlich $(U_i \cap V_j)_{(i,j)\in I\times J}$ indem wir als Abbildungen die Projektionen $I \times J \to I$ bzw. $I \times J \to J$ wählen. Zwei offene Überdeckungen heißen *äquivalent*, falls sie jeweils Verfeinerungen voneinander sind. Das Korollar besagt also, dass $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ nur von der Äquivalenzklasse von $\mathcal{U}$ bezüglich dieser Äquivalenzrelation abhängt. Wir erhalten ein induktives System über der bezüglich Verfeinerung gerichteten Menge der Äquivalenzklassen offener Überdeckungen und können daher zum induktiven Limes übergehen.

Definition 4.7. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Wir definieren die *p-te Čech-Kohomologiegruppe* von $\mathcal{F}$ als

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Nach Proposition 4.3 ist beispielsweise $\check{H}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F})$ die 0-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{F}$ im Sinne des dritten Abschnitts. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe von A-Moduln, so ist $\check{H}^p(X, \mathcal{F})$ in natürlicher Weise ein A-Modul.

Um diesen Abschnitt abzuschließen kommen wir nun zu dem für uns interessanten Satz, der es uns erlaubt die Kohomologie quasi-kohärenter Garben über separierten Schemata via Čech-Kohomologie zu berechnen.

Satz 4.8. Ist X ein separiertes Schema und $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so stimmen die Kohomologiegruppen $H^p(X, \mathcal{F})$, $p \geq 0$, für jedes p mit den eben definierten Čech-Kohomologiegruppen $\check{H}^p(X, \mathcal{F})$ überein.

Beweis. Vergleiche [Liu02, S. 185f, Remark 2.16]. □

5 Das Affinitätskriterium von Serre

Wir haben nun alles was wir brauchen um das Affinitätskriterium zu beweisen. Zunächst beweisen wir ein eigenständiges Kriterium für Affinität, welches wir dann für die entsprechende Implikation in Serre's Affinitätskriterium verwenden. Ab diesem Punkt bezeichne X stets ein Schema. Für $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ definieren wir die offene Menge $X_f = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$. Weiter bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_x$ das eindeutige maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ (NB: $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times \iff f_x \notin \mathfrak{m}_x$).

Proposition 5.1. Sei $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ein globaler Schnitt. Angenommen X besitzt eine endliche affine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$, so dass für alle $i, j \in I$ der Schnitt $U_i \cap U_j$ ebenfalls affin ist. Dann induziert die Restriktionsabbildung $\rho : \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$ einen Isomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f \cong \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$.

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 44f, Proposition 3.12])
Wie immer benutzen wir die universelle Eigenschaft der Lokalisierung um den gewünschten Morphismus zu erhalten. Wir müssen also zeigen, dass ρ die Elemente von $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auf Einheiten in $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$ abbildet. Dabei machen wir uns auch noch einmal klar, dass X_f tatsächlich eine offene Teilmenge von X ist. Sei $x \in X_f$, also $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$. Es gibt dann eine offene Umgebung U von x in X und ein $g \in \mathcal{O}_X(U)$, so dass $f_x g_x = 1$. Es folgt $(fg)|_V = 1$ in $\mathcal{O}_X(V)$ für eine geeignete offene Umgebung V von x mit $V \subseteq U$. Daraus folgt sofort $f_y \in \mathcal{O}_{X,y}^\times$ für

jedes $y \in V$, also $V \subseteq X_f$. Das zeigt, dass X_f offen in X ist. Lassen wir x durch die Elemente von X_f laufen, so erhalten wir eine offene Überdeckung von X_f und lokale Inverse von f. Da diese eindeutig sind müssen sie auf den Schnitten übereinstimmen und lassen sich daher zu einem Inversen von $f|_{X_f}$ verkleben. Das bedeutet ρ bildet f auf eine Einheit ab und damit auch jedes Element von $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung liefert uns nun einen Morphismus $\alpha : \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f \to \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$, der eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaft das folgende Diagramm kommutativ zu machen

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "can."] \arrow[dr, "\rho"'] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f \arrow[d, dashed, "\exists!\alpha"] \\
& \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Es bleibt übrig zu zeigen, dass α ein Isomorphismus ist. Nach Voraussetzung besitzt X die endliche affine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \in U_i$ identifizieren wir den Keim $f_\mathfrak{p}$ mit $f(\mathfrak{p})$. Dann ist X_f die Vereinigung der

$$\begin{aligned}
V_i = U_i \cap X_f &= \{\mathfrak{p} \in U_i \mid f_\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}^\times = \mathcal{O}_{U_i,\mathfrak{p}}^\times\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in U_i \mid f(\mathfrak{p}) \in \mathcal{O}_{U_i}(U_i)_\mathfrak{p}^\times\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in U_i \mid f|_{U_i} \notin \mathfrak{p}\} = D(f|_{U_i})
\end{aligned}$$

Der Übersicht halber schreiben wir nur f für die verschiedenen Restriktionen von f. Nach eben Gezeigtem haben wir dann $\Gamma(V_i, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)_f$. Da wir nur endlich viele U_i haben können wir in der Sequenz (1) die $\prod$ durch $\bigoplus$ ersetzen. Da die Lokalisierung flach ist und mit direkten Summen vertauscht erhalten wir dann die folgende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f \longrightarrow \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)_f \longrightarrow \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)_f$$

Daraus erhalten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)_f \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, equal, "\chi"] & \bigoplus_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)_f \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\psi'"] & \bigoplus_i \Gamma(V_i, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "\rho'"] & \bigoplus_{i,j} \Gamma(V_i \cap V_j, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Da sowohl die obere als auch die untere Zeile exakt ist folgt aus der Kommutativität sofort, dass α injektiv ist. Weiter ist β eine Familie von Morphismen derselben Form wie α. Da $U_i \cap U_j$ sich nach Voraussetzung ebenfalls durch endlich viele affine offene Mengen überdecken lässt ($U_i \cap U_j$ ist selbst affin) zeigen also dieselben Argumente, dass auch β injektiv ist. Man überprüft, dass α nun auch surjektiv ist: Sei $r \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_X)$, dann ist $\psi'(r) \in \bigoplus_i \Gamma(V_i, \mathcal{O}_X)$. Da χ ein Isomorphismus ist, gibt es $s \in \bigoplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)_f$ mit $\chi(s) = \psi'(r)$. Damit folgt

$$\beta(\rho(s)) = \rho'(\chi(s)) = \rho'(\psi'(r)) = 0$$

wegen Exaktheit der unteren Zeile. Wir erhalten $\rho(s) \in ker(\beta)$. Nun ist aber $ker(\beta) = 0$, da β injektiv ist. Das bedeutet wir haben $s \in ker(\rho) = im(\psi)$ wegen Exaktheit der oberen Zeile. Es gibt also ein $r' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_f$ mit $s = \psi(r')$, also $\psi'(r) = \chi(s) = \chi(\psi(r')) = \psi'(\alpha(r'))$. Da ψ' injektiv ist, folgt schließlich $r = \alpha(r') \in im(\alpha)$. Also ist α wie gewünscht surjektiv. □

Lemma 5.2. Sei X ein separiertes Schema. Gibt es $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit den untenstehenden Eigenschaften, so ist X affin.

(a) Für jedes $1 \leq i \leq n$ ist X_{f_i} affin

(b) $f_1, \dots, f_n$ erzeugen das Einsideal von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

Beweis. (vgl. [GW10, S. 335f, Theorem 12.35 (2) $\Longrightarrow$ (1)])
Schreibe $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ und $Y = Spec(A)$. Wir müssen zeigen, dass der kanonische Morphismus $\varphi : X \to Y$ ein Isomorphismus ist. Dieser ist das Urbild der Identität $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ unter der Bijektion

$$Hom((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) \longrightarrow Hom(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

welche einen Morphismus $(f, f^{\#})$ auf die globale Komponente $f_Y^{\#}$ abbildet. Wir haben also $\varphi_Y^{\#} = id_A$. Für $\mathfrak{p} \in Y$ und $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = A$ identifizieren wir also, ähnlich wie im letzten Beweis, den Keim $f_{\mathfrak{p}}$ mit $f(\mathfrak{p})$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(D(f_i)) &= \{x \in X \mid f_i \notin \varphi(x)\} \\
&= \{x \in X \mid f_i(\varphi(x)) \in \mathcal{O}_Y(Y)^{\times}_{\varphi(x)}\} \\
&= \{x \in X \mid f_{i,\varphi(x)} \in \mathcal{O}^{\times}_{Y,\varphi(x)}\} \\
&= \{x \in X \mid f_{i,x} \in \mathcal{O}^{\times}_{X,x}\} = X_{f_i}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Zeile verwendet, dass $\mathcal{O}_Y(Y)_{\varphi(x)} \cong \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ und in der vierten Zeile, dass $\varphi_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ringhomomorphismus ist. Nach Hilbert's Nullstellensatz gilt $Y = \bigcup_i D(f_i)$, da die f_i das Einsideal von A erzeugen. Daraus folgt

$$X = \varphi^{-1}(Y) = \varphi^{-1}(\bigcup_i D(f_i)) = \bigcup_i \varphi^{-1}(D(f_i)) = \bigcup_i X_{f_i}$$

Also ist X die Vereinigung endlich vieler, nach Voraussetzung (a) affiner, offener Mengen. Außerdem sind deren Schnitte ebenfalls affin, da X separiert ist. Die Voraussetzungen für Proposition 5.1 sind also erfüllt und wir erhalten für jedes i einen Isomorphismus $\alpha_i : \Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{f_i} \to \Gamma(X_{f_i}, \mathcal{O}_X)$. Identifizieren wir $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)_{f_i}$ mit $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)_{f_i} = \Gamma(D(f_i), \mathcal{O}_Y)$, so zeigt dies sofort, dass $\varphi|_{X_{f_i}}$ ein Isomorphismus ist, denn offenbar gilt dann $\varphi|_{X_{f_i}} = Spec(\alpha_i)$ und $Spec(-)$ ist ein Funktor. Da die X_{f_i} (bzw. $D(f_i)$) eine offene Überdeckung von X (bzw. Y) bilden folgt daraus direkt, dass $\varphi^{\#}$ ein Isomorphismus von Garben ist und dass φ offen und surjektiv ist. Es bleibt also übrig zu zeigen, dass φ injektiv ist. Seien dazu $x, y \in X$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$. Wähle ein i mit $x \in X_{f_i}$, dann gilt $\varphi(y) = \varphi(x) \in \varphi(X_{f_i}) = D(f_i)$. Dann folgt aber $y \in \varphi^{-1}(D(f_i)) = X_{f_i}$ und daher $x = y$ wegen Injektivität von $\varphi|_{X_{f_i}}$. $\square$

Bemerkung. Die Separiertheit wird nur an einer Stelle verwendet und es fällt nicht schwer zu glauben, dass man mit etwas Zusatzarbeit wahrscheinlich auf diese Voraussetzung verzichten kann. Man bekommt dann dieselbe Aussage für ein (nicht notwendigerweise separiertes) Schema X, das globale Schnitte mit den Eigenschaften (a) und (b) besitzt (vgl. [Sta18, Lemma 27.27.3]). Tatsächlich benötigen wir im Beweis des Affinitätskriteriums die Separiertheit ebenfalls nur um dieses Lemma anwenden zu können. Damit kann man dann das Affinitätskriterium auf quasi-kompakte Schemata erweitern.

Satz 5.3 (Das Affinitätskriterium von Serre)**.** Sei X ein separiertes und quasi-kompaktes Schema. Dann sind äquivalent:

(i) X ist affin

(ii) $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ für jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$

(iii) $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ für jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und jedes $p \geq 1$

Beweis. (vgl. [GW10, S. 334ff, Lemma 12.33 & Theorem 12.35 (v) $\implies$ (ii)])
(iii) $\implies$ (ii). Trivial.
(ii) $\implies$ (i). Wir wollen Lemma 5.2 anwenden. Da X nach Voraussetzung separiert ist müssen wir nur die Existenz geeigneter $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ zeigen. Dazu sei zunächst $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt - das heißt $\{x\}$ ist abgeschlossen in X - und U eine affine offene Umgebung von x in X. Wir haben dann zwei abgeschlossene Teilmengen $Y = X \setminus U$ und $Y' = Y \cup \{x\}$. Zu jeder abgeschlossenen Teilmenge Z von X gibt es genau eine Struktur eines reduzierten Unterschemas auf Z. Die zugehörige quasi-kohärente Idealgarbe ist wie folgt definiert

$$\mathscr{I}_Z(V) = \{f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \mid \forall z \in Z \cap V : f_z \in \mathfrak{m}_z\}$$

für $V \subseteq X$ offen. Wir haben dann $Z = V(\mathscr{I}_Z) = \{z \in X \mid \mathscr{I}_{Z,z} \neq \mathcal{O}_{X,z}\}$ und daher $\mathscr{I}_{Z,z} = \mathcal{O}_{X,z}$, falls $z \notin Z$. Wir wollen die Halme des Quotienten $\mathcal{G} = \mathscr{I}_Y / \mathscr{I}_{Y'}$ berechnen. Da diese isomorph zum Quotienten der Halme sind können wir erst die Halme von $\mathscr{I}_Y$ und $\mathscr{I}_{Y'}$ berechnen und anschließend deren Quotienten bilden. Es sind drei Fälle zu unterscheiden:
<u>Fall 1:</u> Ist $z \notin Y'$, so haben wir auch $z \notin Y$. Demnach haben wir in diesem Fall $\mathscr{I}_{Y,z} = \mathcal{O}_{X,z} = \mathscr{I}_{Y',z}$ und daher $\mathcal{G}_z = 0$.
<u>Fall 2:</u> Ist $z \in Y' \setminus \{x\}$, so finden wir eine offene Umgebung V von z in X, die x nicht enthält, da $\{x\}$ in X abgeschlossen und daher $X \setminus \{x\}$ in X offen ist. Für jede offene Teilmenge W von V ist dann aber $Y \cap W = Y' \cap W$ und daher per Definition $\mathscr{I}_Y|_V = \mathscr{I}_{Y'}|_V$. Es folgt $\mathscr{I}_{Y,z} = \mathscr{I}_{Y',z}$ und daher ebenfalls $\mathcal{G}_z = 0$.
<u>Fall 3:</u> Ist $z = x$, so haben wir $\mathscr{I}_{Y,x} = \mathcal{O}_{X,x}$, da $x \notin Y$. Wir wollen zeigen, dass $\mathscr{I}_{Y',x} = \mathfrak{m}_x$. Da $x \in Y'$ ist $\mathscr{I}_{Y',x}$ ein echtes Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Inklusion $\subseteq$ ist daher klar, da $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_x$ ist. Sei

andererseits $g = f_x \in \mathfrak{m}_x$ der Keim von $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ mit einer offenen Umgebung V von x in X. Betrachte die offene Umgebung $V \cap U$ von x. Wir haben $Y' \cap V \cap U = Y' \cap U \cap V = \{x\} \cap V = \{x\}$ und daher $f \in \mathscr{I}_{Y'}(V \cap U)$, da nach Annahme $f_x \in \mathfrak{m}_x$. Das bedeutet aber $f_x \in \mathscr{I}_{Y',x}$ und daher $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathscr{I}_{Y',x}$. Wir haben also die gewünschte Gleichheit und erhalten $\mathcal{G}_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \kappa(x)$.
Wir schreiben das Ergebnis nochmal etwas übersichtlicher auf

$$\mathcal{G}_z = \begin{cases} \kappa(x) & , \quad z = x \\ 0 & , \quad z \notin Y' \\ 0 & , \quad z \in Y \end{cases}$$

Das bedeutet $\mathcal{G}$ ist die Wolkenkratzergarbe in x mit Wert $\kappa(x)$. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_{Y'} \longrightarrow \mathscr{I}_Y \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

Da $\mathscr{I}_{Y'}$ quasi-kohärent ist haben wir nach Voraussetzung $H^1(X, \mathscr{I}_{Y'}) = 0$. Also haben wir eine exakte Sequenz zwischen den globalen Schnitten

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_{Y'}(X) \longrightarrow \mathscr{I}_Y(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow 0$$

Daraus folgt schließlich, dass die obere Zeile des folgenden kommutativen Diagramms exakt ist

$$\begin{tikzcd} \mathscr{I}_Y(X) \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "can."] & \mathcal{G}(X) = \kappa(x) \arrow[r] \arrow[d, "can."] & 0 \\ \mathscr{I}_{Y,x} \arrow[r, "\pi_x"] & \mathcal{G}_x = \kappa(x) & \end{tikzcd}$$

Außerdem ist die rechte kanonische Abbildung ein Isomorphismus, das heißt $can. \circ \pi_X$ ist surjektiv. Wegen Kommutativität ist daher auch $\pi_x \circ can.$ surjektiv. Nun gilt $(\pi_x \circ can.)(g) = g_x + \mathfrak{m}_x$ für $g \in \mathscr{I}_Y(X) \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Da $\kappa(x) \neq 0$ folgt daher aus der Surjektivität die Existenz eines $f \in \mathscr{I}_Y(X)$ mit $f_x + \mathfrak{m}_x \neq 0$ bzw. $f_x \notin \mathfrak{m}_x$. Wir haben also $x \in X_f$ und $X_f \subseteq X \setminus Y = U$, da $f \in \mathscr{I}_Y(X)$. Das impliziert $X_f = U_{f|_U}$. Wie im Beweis von 5.1 ist X_f damit die prinzipale offene Menge $D(f|_U)$ von U und daher insbesondere affin. Wir erhalten also eine Familie offener Teilmengen von X der Form X_f für $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, deren Vereinigung per Konstruktion alle abgeschlossenen Punkte enthält. Ist nun $y \in X$ beliebig, so ist $\overline{\{y\}}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X. Diese ist quasi-kompakt, da X quasi-kompakt ist, und enthält daher einen abgeschlossenen Punkt ξ (vgl. [Liu02, S. 67, Exercise 4.8]). Wäre nun y nicht in der Vereinigung der X_f enthalten, so wäre y in deren Komplement enthalten. Das ist aber eine abgeschlossene Teilmenge von X und würde daher auch den Abschluss von $\{y\}$ enthalten. Dann wäre aber ξ ein abgeschlossener Punkt von X der nicht in der Vereinigung der X_f enthalten ist. Es folgt, dass y in der Vereinigung der X_f liegt, welche also eine offene Überdeckung von X bilden. Wegen Quasi-Kompaktheit können wir eine endliche Teilüberdeckung wählen, etwa $(X_{f_i})_{i=1}^n$

mit $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Insbesondere haben wir damit Eigenschaft (a) aus Lemma 5.2 gezeigt. Es bleibt also übrig zu zeigen, dass $f_1, \dots, f_n$ das Einsideal von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ erzeugen. Dazu betrachten wir den Morphismus $\psi : \mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X$, welcher für $V \subseteq X$ offen wie folgt definiert ist

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \textstyle\sum_i \alpha_i \; f_i|_V$$

Wegen $X = \bigcup_i X_{f_i} = \{x \in X \mid \exists i : f_{i,x} \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$ gibt es zu jedem $x \in X$ ein i, so dass $f_{i,x}$ das Einsideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ erzeugt. Das zeigt sofort, dass ψ_x für jedes $x \in X$ surjektiv ist, also ist ψ surjektiv. Wir haben dann eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathit{ker}(\psi) \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Da ψ ein Morphismus zwischen quasi-kohärenten Garben ist, ist $\mathit{ker}(\psi)$ ebenfalls quasi-kohärent (vgl. [Liu02, S. 162, Proposition 1.12 (c)]). Nach Voraussetzung ist also $H^1(X, \mathit{ker}(\psi)) = 0$ und wir haben wieder eine exakte Sequenz globaler Schnitte

$$0 \longrightarrow \mathit{ker}(\psi_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)^n \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow 0$$

Die Exaktheit auf der rechten Seite bedeutet aber offensichtlich nichts anderes, als dass $f_1, \dots, f_n$ das Einsideal von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ erzeugen.
(i) $\Longrightarrow$ (iii). Sei $X = \mathit{Spec}(A)$ für einen Ring A und $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Da jede offene Überdeckung von X eine Verfeinerung durch prinzipale offene Mengen besitzt, genügt es nach Satz 4.8 zu zeigen, dass $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ gilt für jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = (D(f_i))_{i \in I}$ für gewisse $f_i \in A$. Weiter können wir wegen Quasi-Kompaktheit von X annehmen, dass I endlich ist. Schreibe $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ für einen A-Modul M. Für $p \geq 1$ und $\mathbf{i} = (i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ schreiben wir $f_{\mathbf{i}} = f_{i_0} \cdots f_{i_p}$. Es folgt $D(f_{i_0}) \cap \dots \cap D(f_{i_p}) = D(f_{i_0} \cdots f_{i_p}) = D(f_{\mathbf{i}})$. Wir wollen zeigen, dass $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für $p \geq 1$. Dazu müssen wir zeigen, dass $\mathit{ker}(\check{d}^p) \subseteq \mathit{im}(\check{d}^{p-1})$ für $p \geq 1$. Sei also $m = (m_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}} \in \mathit{ker}(\check{d}^p)$ mit $m_{\mathbf{i}} \in \mathcal{F}(D(f_{\mathbf{i}})) = \widetilde{M}(D(f_{\mathbf{i}})) = M_{f_{\mathbf{i}}}$. Das heißt für alle $(i_0, \dots, i_{p+1}) \in I^{p+2}$ haben wir

$$0 = \check{d}(m)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{r=0}^{p+1} (-1)^r m_{i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_{p+1}}$$

Da die Elemente von $M_{f_{\mathbf{i}}}$ sich alle als Brüche schreiben lassen finden wir $x_{\mathbf{i}} \in M$ und ein $k \geq 1$, so dass $m_{\mathbf{i}} = x_{\mathbf{i}} / f_{\mathbf{i}}^k$ (NB: Wir können k so groß wählen, dass es unabhängig von $\mathbf{i}$ ist, indem wir gegebenenfalls Potenzen von $f_{\mathbf{i}}$ in den Zähler aufnehmen). Für ein beliebiges $j \in I$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \check{d}(m)_{j i_0 \dots i_p} &= (-1)^0 m_{\hat{j} i_0 \dots i_p} + \sum_{r=0}^{p} (-1)^{r+1} m_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_p} \\ &= m_{\mathbf{i}} + \sum_{r=0}^{p} (-1)^{r+1} m_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_p} \\ &= \frac{x_{\mathbf{i}}}{f_{\mathbf{i}}^k} + \sum_{r=0}^{p} (-1)^{r+1} \frac{x_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_p} f_{i_r}^k}{f_j^k f_{\mathbf{i}}^k} \end{aligned}$$

Das bedeutet es gibt eine natürliche Zahl $l \geq 1$, so dass wir für alle $j \in I$ und $\mathbf{i} \in I^{p+1}$ die folgende Gleichheit von Elementen in $M_{f_\mathbf{i}}$ gilt

$$f_j^{k+l} m_\mathbf{i} = \frac{f_j^{k+l} x_\mathbf{i}}{f_\mathbf{i}^k} = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \frac{f_j^l f_{i_r}^k x_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_p}}{f_\mathbf{i}^k}$$

Da die $D(f_j^{k+l}) = D(f_j)$ eine offene Überdeckung von X bilden folgt mit Hilbert's Nullstellensatz, dass $h_j \in A$ existieren mit $\sum_j h_j f_j^{k+l} = 1$. Wir definieren die $(p-1)$-Kokette n wie folgt: Setze $n_{i_0 \dots i_{p-1}} = \sum_j h_j f_j^l \frac{x_{j i_0 \dots i_{p-1}}}{f_{i_0 \dots i_{p-1}}^k}$ für $(i_0, \dots, i_{p-1}) \in I^p$. Eine kurze Rechnung zeigt $\check{d}(n) = m$

$$\begin{aligned}
\check{d}(n)_{i_0 \dots i_p} &= \sum_{r=0}^{p} (-1)^r n_{i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_p} \\
&= \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \sum_j h_j \frac{f_j^l f_{i_r}^k x_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_p}}{f_\mathbf{i}^k} \\
&= \sum_j h_j \underbrace{\sum_{r=0}^{p} (-1)^r \frac{f_j^l f_{i_r}^k x_{j i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_p}}{f_\mathbf{i}^k}}_{= f_j^{k+l} m_\mathbf{i}} \\
&= \underbrace{\sum_j h_j f_j^{k+l}}_{=1} m_{i_0 \dots i_p} = m_{i_0 \dots i_p}
\end{aligned}$$

Wir haben also wie gewünscht $ker(\check{d}^p) \subseteq im(\check{d}^{p-1})$. □

Bemerkung. (i) Wie bereits zuvor bemerkt gilt das Affinitätskriterium auch allgemeiner für quasi-kompakte Schemata. Wir haben bereits angemerkt, wie man die Implikation (ii) $\Longrightarrow$ (i) ohne Separiertheit beweist, aber wir haben nun gesehen, dass man auch für die anderen beiden Implikationen die Separiertheit nicht braucht: Die Implikation (iii) $\Longrightarrow$ (ii) gilt offensichtlich immer und bei (i) $\Longrightarrow$ (iii) ist das Schema affin und daher insbesondere separiert (vgl. [Liu02, S. 100, Proposition 3.4]).
(ii) Wie in [Liu02, S. 186, Theorem 2.19] folgt aus dem Beweis von Satz 5.3 (i) $\Longrightarrow$ (iii) zusammen mit Satz 4.8 auch, dass für jedes separierte Schema X, jede affine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X, jeden quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und alle $p \geq 0$ der kanonische Morphismus $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(X, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$ ein Isomorphismus ist.

Korollar 5.4. Sei X ein separiertes Schema, das eine affine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ durch $m \in \mathbb{N}$ affine offene Mengen besitzt, und sei $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $p \geq m$.

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 181, Corollary 2.5])
Nach Satz 4.8 gilt $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) \cong H^p(X,\mathcal{F})$. Nach Teil (ii) der vorigen Bemerkung ist $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^p(X,\mathcal{F})$ ein Isomorphismus, da $\mathcal{U}$ eine affine offene Überdeckung ist. Weiter dürfen wir $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ mittels alternierender Koketten berechnen. Da es jedoch keine $(m+1)$ verschiedenen Elemente in $\{1,...,m\}$ gibt folgt, dass alle alternierenden p-Koketten für $p \geq m$ gleich 0 sind und daher $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$. □

6 Kohärente Garben

Bevor wir den Endlichkeitssatz beweisen können müssen wir uns etwas mehr mit kohärenten Garben beschäftigen. Wir werden über kohärente Garben über lokal noetherschen Schemata sowie über projektiven Schemata reden und unter anderem das Verhalten von Kohärenz unter pushforwards überprüfen.

Definition 6.1. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt

(i) *endlich erzeugt*, falls zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x in X, ein $n \geq 1$ und ein surjektiver Morphismus $\mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U$ existieren

(ii) *kohärent*, falls $\mathcal{F}$ endlich erzeugt ist im Sinne von (i) und falls für jede offene Teilmenge U von X und jeden Homomorphismus $\alpha : \mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U$ auch $ker(\alpha)$ endlich erzeugt ist

Bemerkung. Offensichtlich besteht ein Zusammenhang zwischen endlich erzeugten Modulgarben und endlich erzeugten Moduln sowie zwischen kohärenten Modulgarben und endlich präsentierten Moduln. Da endlich präsentiert und endlich erzeugt über noetherschen Ringen äquivalent sind ist es nicht verwunderlich, dass endlich erzeugt und kohärent über lokal noetherschen Schemata äquivalent sind. Das beweisen wir in der folgenden Proposition.

Proposition 6.2. Sei $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Betrachte die folgenden Aussagen:

(i) $\mathcal{F}$ ist kohärent

(ii) $\mathcal{F}$ ist endlich erzeugt

(iii) Für jede affine offene Teilmenge U von X ist $\mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U)$-Modul

Es gilt stets (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Ist X lokal noethersch, so gilt auch (iii) $\Longrightarrow$ (i).

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 161f, Proposition 1.1])
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Gilt per Definition von Kohärenz.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Sei $U \subseteq X$ affin offen. Da $\mathcal{F}$ endlich erzeugt ist finden wir zu jedem $x \in U$ eine offene Umgebung U_i von x, ein $n_i \geq 1$ und einen surjektiven Morphismus $\mathcal{O}_X^{n_i}|_{U_i} \to \mathcal{F}|_{U_i}$. Nun ist U aber affin, also bilden die prinzipalen offenen Mengen eine Basis der Topologie auf U. Daher können wir,

gegebenenfalls nach weiterer Restriktion, annehmen, dass alle U_i prinzipale offene Teilmengen von U sind. Wir erhalten also eine Überdeckung $(U_i)_i$ von U durch prinzipale offene Mengen U_i und exakte Sequenzen $\mathcal{O}_X^{n_i}|_{U_i} \to \mathcal{F}|_{U_i}$. Schließlich können wir annehmen, dass diese Überdeckung endlich ist, da U affin und daher quasi-kompakt ist. Serre's Affinitätskriterium impliziert nun, dass $\mathcal{O}_X(U_i)^{n_i} \to \mathcal{F}(U_i) \to 0$ ebenfalls exakt ist, da U_i quasi-kompakt und separiert ist. Das bedeutet $\mathcal{F}(U_i)$ ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U_i)$-Modul. Da U_i prinzipal offen ist haben wir $\mathcal{F}(U_i) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U_i)$. Also wird $\mathcal{F}(U_i)$ von endlich vielen einfachen Tensoren $m_i \otimes n_i$ mit $m_i \in \mathcal{F}(U)$ und $n_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ erzeugt. Setzen wir M als den von den m_i erzeugten Modul, so haben wir einen endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(U)$-Untermodul von $\mathcal{F}(U)$ mit $M \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{F}(U_i)$. Nachdem wir M gegebenenfalls vergrößern können wir annehmen, dass diese Gleichheit für alle i gilt. Beachte, dass dann $\widetilde{M}$ ein $\mathcal{O}_U$-Untermodul von $\widetilde{\mathcal{F}(U)} = \mathcal{F}|_U$ ist mit $\widetilde{M}(U_i) = M \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{F}(U_i)$ für alle i. Daraus folgt $\widetilde{M}\Big|_{U_i} = \widetilde{M}(U_i)^{\sim} = \mathcal{F}|_{U_i}$ für alle i und daher $\widetilde{M} = \mathcal{F}|_U$. Insbesondere ist $\mathcal{F}(U) = \widetilde{M}(U) = M$ endlich erzeugt.
(iii) $\Longrightarrow$ (i). Sei nun X lokal noethersch. Zunächst ist $\mathcal{F}$ offensichtlich endlich erzeugt, denn für $x \in X$ können wir eine beliebige affine offene Umgebung U von x in X wählen. Da $\mathcal{F}(U)$ nach Voraussetzung ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist haben wir eine Surjektion $\mathcal{O}_X(U)^n \to \mathcal{F}(U)$ für ein $n \geq 1$. Übergang zu assoziierten Modulgarben liefert sofort die gewünschte Surjektion $\mathcal{O}_X^n|_U \to \mathcal{F}|_U$. Wir müssen also nur zeigen, dass für eine beliebige offene Menge V und jeden Morphismus $\alpha : \mathcal{O}_X^n|_V \to \mathcal{F}|_V$ auch $ker(\alpha)$ endlich erzeugt ist. Da dies eine lokale Eigenschaft ist können wir annehmen, dass V affin ist. Es gibt dann einen $\mathcal{O}_X(V)$-Modul N mit $\mathcal{F}|_V = \widetilde{N}$. Da $\mathcal{O}_X^n$ ebenfalls quasi-kohärent ist folgt, dass $ker(\alpha)$ als Kern eines Morphismus zwischen quasi-kohärenten Garben quasi-kohärent ist. Wir haben also $ker(\alpha) = ker(\alpha_V)^{\sim}$. Da X noethersch ist, ist $\mathcal{O}_X(V)$ ein noetherscher Ring (vgl. [Liu02, S. 55, Proposition 3.46 (b)]). Also ist $ker(\alpha_V)$ als Untermodul des endlich erzeugten $\mathcal{O}_X(V)$-Moduls $\mathcal{O}_X(V)^n$ ebenfalls endlich erzeugt. Das zeigt, dass $ker(\alpha)$ endlich erzeugt ist. □

Wir erinnern uns, dass ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata *endlich* heißt, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) f ist *affin*, das heißt für $V \subseteq Y$ affin offen ist $f^{-1}(V) \subseteq X$ affin offen

(b) Für jede affine offene Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ über $f_V^{\#}$ ein endlich erzeuger $\mathcal{O}_Y(V)$-Modul

Proposition 6.3. Sei $f : X \to Y$ ein endlicher Morphismus und $\mathcal{F}$ ein endlich erzeugter quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $f_*\mathcal{F}$ ein endlich erzeugter quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul.

Beweis. Nach [Bos13, S. 463, Remark 2] ist f separiert und quasi-kompakt. Wir wissen also bereits, dass $f_*\mathcal{F}$ quasi-kohärent ist (vgl. [Har77, S. 115, Proposition 5.8]). Es bleibt daher zu zeigen, dass $f_*\mathcal{F}$ endlich erzeugt ist. Da das eine lokale Eigenschaft ist können wir annehmen, dass Y affin ist. Dann ist auch X affin, da f nach Voraussetzung affin ist. Wegen Quasi-Kohärenz haben wir also $f_*\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)^\sim$ als $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Nun ist $\mathcal{O}_X(X)$ nach Bedingung (b) ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul. Weiter ist $\mathcal{F}(X)$ nach (ii) $\Longrightarrow$ (iii) der letzten Proposition ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(X)$-Modul, da X affin ist. Daher ist $\mathcal{F}(X)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul. Wie im Beweis der letzten Proposition erhalten wir, dass $f_*\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)^\sim$ als $\mathcal{O}_Y$-Modul endlich erzeugt ist. $\square$

Bemerkung. Ist Y lokal noethersch, so erhalten wir mit Proposition 6.2, dass $f_*\mathcal{F}$ sogar kohärent ist. Das bedeutet also, dass pushforwards von kohärenten Garben unter endlichen Morphismen in diesem Fall kohärent sind. Beispielsweise sind abgeschlossene Immersionen endlich, was wir im Beweis des Endlichkeitssatzes verwenden werden.

Neben endlich erzeugt gibt es auch einen Begriff von Flachheit für eine Modulgarbe. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so können wir das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ betrachten. Wir haben $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ für jedes $x \in X$ (vgl. [GW10, S. 175, (7.4.7)]). Außerdem ist die Exaktheit einer Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln halmweise definiert. Es ist also natürlich Flachheit von $\mathcal{O}_X$-Moduln wie folgt zu definieren.

Definition 6.4. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt

(i) *flach im Punkt* $x \in X$, falls $\mathcal{F}_x$ ein flacher $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist

(ii) *flach*, falls $\mathcal{F}$ in jedem Punkt $x \in X$ flach im Sinne von (i) ist

Beispiel. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{L}$ heißt *lokal frei vom Rang* 1, falls zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U von x in X existiert, so dass $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$ als $\mathcal{O}_U$-Moduln. Offensichtlich sind dann die Halme freie, also insbesondere flache, $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln. Ist $X = \mathbb{P}^n_A$ der projektive Raum über einem Ring A, so sind beispielsweise die Serre-Twists $\mathcal{O}_X(d)$, $d \in \mathbb{Z}$, lokal frei vom Rang 1.

Lemma 6.5. Sei X ein noethersches oder separiertes und quasi-kompaktes Schema, $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{L}$ lokal frei vom Rang 1. Wir fixieren zwei globale Schnitte $f \in \mathcal{F}(X)$ und $s \in \mathcal{L}(X)$. Wir schreiben $\mathcal{L}^d$ für $\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}$ und s^d für $s \otimes \cdots \otimes s$ und $X_s = \{x \in X \mid s_x\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{L}_x\}$. Es gelten:

(i) Ist $f|_{X_s} = 0$, so gibt es ein $d \geq 1$, so dass $f \otimes s^d = 0$ in $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^d)(X)$

(ii) Sei $g \in \mathcal{F}(X_s)$. Dann gibt es ein $d_0 \geq 1$, so dass $g \otimes (s^d|_{X_s})$ für jedes $d \geq d_0$ die Restriktion eines globalen Schnitts von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^d$ auf X_s ist

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 166f, Lemma 1.25])
Da $\mathcal{L}$ lokal frei vom Rang 1 ist können wir X durch affine offene Mengen X_i überdecken, so dass $\mathcal{L}|_{X_i} \cong \mathcal{O}_{X_i}$ für alle i. Mit den Voraussetzungen an X können wir weiter annehmen, dass diese Überdeckung endlich ist, sagen wir $i \leq r$. Für jedes i wähle einen Erzeuger $e_i \in \mathcal{L}(X_i)$ von $\mathcal{L}|_{X_i}$ - das heißt der Keim $e_{i,x}$ erzeugt $\mathcal{L}_x$ für jedes $x \in X_i$ - und h_i, so dass $s|_{X_i} = e_ih_i$. Es ist dann,

ähnlich wie im Beweis von 5.1, $X_s \cap X_i = D(h_i)$ eine prinzipale offene Menge von X_i. Damit können wir nun die beiden Teile des Lemmas beweisen:
(i) Da $f|_{X_s} = 0$ folgt durch Restriktion $f|_{X_s \cap X_i} = 0$ für alle i. Da $X_s \cap X_i$ die prinzipale offene Menge $D(h_i)$ ist gilt wegen Quasi-Kohärenz von $\mathcal{F}$, dass $\mathcal{F}(D(h_i)) = \mathcal{F}(X_i) \otimes_{\mathcal{O}_X(X_i)} \mathcal{O}_X(D(h_i))$. Es gibt also ein $d \geq 1$, so dass $f|_{X_i} h_i^d = 0$ ist. Nachdem wir d gegebenenfalls vergrößern können wir annehmen, dass es unabhängig von i ist, da wir nur endlich viele i haben. Auf X_i definiert Multiplikation mit e_i^d einen Isomorphismus von Garben $\mathcal{O}_{X_i} \to \mathcal{L}^d\big|_{X_i}$, da $e_{i,x}^d$ für jedes $x \in X_i$ den Halm $\mathcal{L}_x^d$ erzeugt. Tensorieren mit $\mathcal{F}|_{X_i}$ induziert einen Isomorphismus $\varphi_{i,d} : \mathcal{F}|_{X_i} = \mathcal{F}|_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i} \to (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^d)\big|_{X_i}$. Wir haben dann

$$0 = \varphi_{i,d}(f|_{X_i} h_i^d) = f|_{X_i} h_i^d \otimes e_i^d = f|_{X_i} \otimes h_i^d e_i^d = (f \otimes s^d)\big|_{X_i}$$

Da dies für alle i gilt folgt mit dem Garbenaxiom, dass $f \otimes s^d = 0$.
(ii) Wir betrachten die Restriktion $g|_{X_s \cap X_i} \in \mathcal{F}(D(h_i))$. Ähnlich wie in (i) finden wir ein $m \geq 1$ und ein $f_i \in \mathcal{F}(X_i)$, so dass

$$g|_{X_s \cap X_i} h_i^m|_{X_s \cap X_i} = f_i|_{X_s \cap X_i}$$

Wobei wir wieder annehmen können, dass dieses m unabhängig von i ist indem wir gegebenenfalls Potenzen von h_i in f_i aufnehmen. Mit derselben Notation wie im Beweis von (i) setzen wir $t_i = \varphi_{i,m}(f_i) \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m)(X_i)$. Es gilt dann nach der selben Rechnung wie in (i)

$$t_i|_{X_s \cap X_i} = \varphi_{i,m}(f_i|_{X_s \cap X_i}) = g|_{X_s \cap X_i} \otimes s^m|_{X_s \cap X_i}$$

Für beliebige i, j haben wir dann, da m unabhängig von i und j ist

$$t_i|_{X_s \cap (X_i \cap X_j)} = t_j|_{X_s \cap (X_i \cap X_j)}$$

Ist X noethersch, so ist $X_i \cap X_j$ ebenfalls noethersch (vgl. [Liu02, S. 55, Proposition 3.46 (a)]). Ist X separiert und quasi-kompakt, so ist $X_i \cap X_j$ als Schnitt affiner offener Mengen wieder affin und daher insbesondere separiert und quasi-kompakt. In jedem Fall können wir (i) anwenden, wobei wir dann X durch $X_i \cap X_j$ und $\mathcal{F}$ durch $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m)|_{X_i \cap X_j}$ ersetzen. Es existiert also ein $q \geq 1$, so dass in $((\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) \otimes \mathcal{L}^q)(X_i \cap X_j)$ gilt

$$(t_i|_{X_i \cap X_j} - t_j|_{X_i \cap X_j}) \otimes s^q|_{X_i \cap X_j} = 0$$

Setze $d_0 = m + q$. Für jedes $d \geq d_0$ stimmen dann nach der letzten Gleichung die $t_i \otimes (s^{q+d-d_0}\big|_{X_i}) \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^d)(X_i)$ auf den Schnittmengen $X_i \cap X_j$ überein und lassen sich daher nach Garbenaxiom zu einem globalen Schnitt $t \in (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^d)(X)$ verkleben. Wir zeigen, dass die Restriktion von t auf X_s gerade $g \otimes (s^d\big|_{X_s})$ ist. Dazu genügt es, da die $X_s \cap X_i$ eine offene Überdeckung von X_s bilden, zu zeigen, dass $t|_{X_s \cap X_i} = g \otimes (s^d\big|_{X_s})\Big|_{X_s \cap X_i}$ für jedes i. Das zeigt die folgende

Rechnung

$$\begin{aligned} t|_{X_s\cap X_i} &= t_i \otimes (\, s^{q+d-d_0}|_{X_i})\Big|_{X_s\cap X_i} \\ &= \underbrace{(g|_{X_s\cap X_i} \otimes s^m|_{X_s\cap X_i})}_{=t_i|_{X_s\cap X_i}} \otimes (\, s^{q+d-d_0}|_{X_s\cap X_i}) \\ &= g \otimes (\, s^d|_{X_i})\Big|_{X_s\cap X_i} \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass t die in (ii) gewünschte Eigenschaft hat. □

Sei A ein Ring, $n \geq 0$ und $f : X \to \mathbb{P}^n_A$ eine abgeschlossene Immersion, d.h. X ist ein projektives A-Schema. Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $d \in \mathbb{Z}$, so setzen wir wie üblich $\mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(d)$. Wir nennen diesen $\mathcal{O}_X$-Modul den *d-ten Twist* von $\mathcal{F}$.

Satz 6.6. Sei X ein projektives Schema über einem Ring A. Zu jedem endlich erzeugten quasi-kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ existiert ein $d_0 \geq 0$, so dass $\mathcal{F}(d)$ für jedes $d \geq d_0$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt wird, d.h. ihre Keime in x erzeugen den Halm $\mathcal{F}(d)_x$ für alle $x \in X$.

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 167, Theorem 1.27])
Wir wollen den Beweis auf den Fall $X = \mathbb{P}^n_A$ reduzieren. Sei also $f : X \to \mathbb{P}^n_A$ eine abgeschlossene Immersion. Nach Proposition 6.3 wissen wir, dass $f_*\mathcal{F}$ ein endlich erzeugter quasi-kohärenter $\mathbb{P}^n_A$-Modul ist. Weiter behaupten wir, dass $f_*(\mathcal{F}(d)) = (f_*\mathcal{F})(d)$, also $f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(d) = f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(d))$. Da die beiden Garben quasi-kohärent sind können wir das auf affinen offenen Mengen überprüfen. Sei also $f : \mathit{Spec}(R/I) = X \to Y = \mathit{Spec}(R)$ und wir müssen zeigen, dass für beliebige quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{G}$ die folgende Gleichheit gilt

$$f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} = f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{G})$$

Schreiben wir $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ für einen R/I-Modul M und $\mathcal{G} = \widetilde{N}$ für einen R-Modul N, so ist diese Gleichheit äquivalent zu der folgenden Gleichheit von R-Moduln

$$M \otimes_R N = M \otimes_{R/I} (R/I \otimes_R N)$$

Das ist aber einfach die bekannte Kürzungsregel für das Tensorprodukt. Schließlich haben wir $f_*(\mathcal{F}(d))(\mathbb{P}^n_A) = \mathcal{F}(d)(X)$ per Definition von f_*. Es folgt also, dass $\mathcal{F}(d)$ von globalen Schnitten erzeugt wird, wenn $(f_*\mathcal{F})(d)$ von globalen Schnitten erzeugt wird und wir können ohne Einschränkungen von $X = \mathbb{P}^n_A$ ausgehen. Schreibe $U_i = D_+(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, für die gewöhnliche affine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^n_A = \mathit{Proj}(A[x_0, \ldots, x_n])$. Nach Proposition 6.2 wird $\mathcal{F}(U_i)$ von endlich vielen Elementen $s_{ij} \in \mathcal{F}(U_i)$, $j \leq m$ erzeugt. Mit der Notation aus dem letzten Lemma wählen wir $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$. Es gilt dann $\mathcal{O}_X(d) = \mathcal{L}^d$. Also existiert ein $d_0 \geq 0$, so dass für jedes i, j und $d \geq d_0$ der einfache Tensor $s_{ij} \otimes x_i^d$

die Restriktion eines globalen Schnittes t_{ij} von $\mathcal{F}(d)$ auf U_i ist. Nach [Liu02, S. 162, Proposition 1.12 (b)] haben wir nun $\mathcal{F}(d)(U_i) = \mathcal{F}(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{O}_X(d)(U_i)$. Weiter wissen wir, dass $\mathcal{O}_X(d)(U_i) = x_i^d \mathcal{O}_X(U_i)$ (vgl. [Liu02, S. 165, Example 1.19]). Das impliziert dann sofort, dass $\mathcal{F}(d)$ von den globalen Schnitten t_{ij} erzeugt wird. □

Korollar 6.7. Seien X und $\mathcal{F}$ wie in Satz 6.6. Es existieren $m \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$ und ein surjektiver Morphismus von Garben $\alpha : \mathcal{O}_X(m)^r \to \mathcal{F}$.

Beweis. (vgl. [Liu02, S. 167, Corollary 1.28])
Nach Satz 6.6 finden wir ein $d \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathcal{F}(d)$ von r globalen Schnitten erzeugt wird. Das ist aber äquivalent zur Existenz eines surjektiven Homomorphismus $\mathcal{O}_X^r \to \mathcal{F}(d)$. Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(-d)$ gibt uns den gewünschten surjektiven Homomorphismus $\mathcal{O}_X(-d)^r \to \mathcal{F}$. □

Bemerkung. Ist A ein noetherscher Ring, so ist X wie in Satz 6.6 und Korollar 6.7 ein noethersches Schema. Dann ist $ker(\alpha)$ ebenfalls kohärent, denn $ker(\alpha)$ ist endlich erzeugt, da $\mathcal{F}$ kohärent ist, und quasi-kohärent, da sowohl $\mathcal{F}$ als auch $\mathcal{O}_X(m)^r$ quasi-kohärent sind. Die Kohärenz folgt daher aus Proposition 6.2 zu Beginn des Abschnitts. Damit haben wir folgende exakte Sequenz kohärenter Garben

$$0 \longrightarrow ker(\alpha) \longrightarrow \mathcal{O}_X(m)^r \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Diese Sequenz wird eine entscheidende Rolle im Beweis des Endlichkeitssatzes spielen.

7 Der Endlichkeitssatz von Serre

In diesem letzten Abschnitt beweisen wir den Endlichkeitssatz von Serre für ein projektives Schema X über einem noetherschen Ring A. Dazu berechnen wir zunächst die Kohomologie der Serre-Twists $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(d)$, $d \in \mathbb{Z}$. Der Endlichkeitssatz ist dann letztlich eine Verallgemeinerung auf beliebige kohärente Garben. Wir wählen die übliche Graduierung des Polynomrings $A[x_0, \ldots, x_n]$ in $n+1$ Variablen über A und schreiben $(A[x_0, \ldots, x_n])_d$ für die Elemente die homogen vom Grad d sind.

Lemma 7.1. Sei A ein Ring und $n \geq 0$. Für $d \in \mathbb{Z}$ gilt

$$H^p(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(d)) = \begin{cases} (A[x_0, \ldots, x_n])_d & , \quad p = 0 \\ (\frac{1}{x_0 \ldots x_n} A[\frac{1}{x_0}, \ldots, \frac{1}{x_n}])_d & , \quad p = n \\ 0 & , \quad p \neq 0, n \end{cases}$$

Insbesondere ist $H^p(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A})$ stets ein endlich erzeugter A-Modul.

Beweis. (vgl. [Sta18, Lemma 29.8.1])
Da $\mathbb{P}^n_A$ separiert und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(d)$ quasi-kohärent ist können wir die Kohomologie

nach der Bemerkung im Anschluss an Satz 5.3 via Čech-Kohomologie mit einer beliebigen affinen offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ berechnen. In diesem Fall verwenden wir den geordneten Čech-Komplex mit der gewohnten Überdeckung $\mathcal{U} = (D_+(x_i))_{i=0}^n$ von $\mathbb{P}_A^n$. Wir haben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(D_+(x_i)) = (A[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}])_0$ (vgl. [Liu02, S. 165, Proposition 1.17 (i)]). Demnach gilt für den d-ten Twist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(d)(D_+(x_i)) = (A[x_0, \dots, x_n, \frac{1}{x_i}])_d$. Unter Benutzung der Tatsache, dass $D_+(x_{i_0}) \cap \dots \cap D_+(x_{i_p}) = D_+(x_{i_0} \dots x_{i_p})$ hat der geordnete Čech-Komplex also die folgenden Glieder

$$\check{C}^p_{ord}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}) = \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} (A[x_0, \dots x_n, \frac{1}{x_{i_0} \dots x_{i_p}}])_d$$

Jeder Term besitzt eine natürliche $\mathbb{Z}^{n+1}$-Graduierung indem wir ein Monom $x_0^{e_0} \dots x_n^{e_n}$ als homogen vom Grad $\vec{e} = (e_0, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ setzen. Die Definition des Differentials zeigt, dass es diese Graduierung respektiert. Da die Kohomologiegruppen mit direkten Summen vertauschen genügt es nun die Kohomologie der graduierten Bestandteile zu berechnen und am Ende die direkte Summe zu nehmen. Definieren wir den Komplex $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ als den Čech-Komplex der geordneten Koketten die homogen vom Grad $\vec{e} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ sind, so haben wir also

$$\check{C}^\bullet_{ord}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(d)) = \bigoplus_{\vec{e}} \check{C}^\bullet(\vec{e})$$

Dabei sind jedoch einige Summanden auf der rechten Seite trivial, wie wir gleich sehen werden. Fixiere ein $\vec{e} = (e_0, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Damit dieser Grad in obigem Komplex einen nicht trivialen Beitrag leistet muss $e_0 + \dots + e_n = d$ gelten. Unter dieser Annahme definieren wir die Menge

$$NEG(\vec{e}) = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid e_i < 0\}$$

Die homogenen Elemente in $\check{C}^p_{ord}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n})$ sind skalare Vielfache von Monomen der Form $x_0^{m_0} \dots x_n^{m_n} (\frac{1}{x_{i_0} \dots x_{i_p}})^m$ mit natürlichen Zahlen $m, m_0, \dots, m_n$. Bringt man diesen Ausdruck in die Form $x_0^{e_0} \dots x_n^{e_n}$, so ist $e_i = m_i$ falls $i \notin \{i_0, \dots, i_p\}$ und $e_i = m_i - m$ falls $i \in \{i_0, \dots, i_p\}$. Das heißt e_i kann höchstens dann negativ sein, wenn $i \in \{i_0, \dots, i_p\}$. Nach Definition von $NEG(\vec{e})$ hat der Summand $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ des Čech-Komplexes also die folgenden Glieder

$$\check{C}^p(\vec{e}) = \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p, NEG(\vec{e}) \subseteq \{i_0, \dots, i_p\}} A \cdot x_0^{e_0} \dots x_n^{e_n}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:
Fall 1: $NEG(\vec{e}) = \{0, \dots, n\}$. Das bedeutet alle Exponenten e_i sind negativ. Wir haben hier nur eine Möglichkeit für $i_0 < \dots < i_p$ mit $NEG(\vec{e}) \subseteq \{i_0, \dots, i_p\}$, nämlich $\{i_0, \dots, i_p\} = NEG(\vec{e}) = \{0, \dots, n\}$, also $p = n$. Das bedeutet bis auf

das n-te Glied sind alle Terme des Komplexes 0. Also hat $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ in diesem Fall die folgende Form

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \check{C}^n(\vec{e}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

Per Definition ist $\check{C}^n(\vec{e}) = A \cdot \dfrac{1}{x_0^{-e_0} \ldots x_n^{-e_n}}$. Damit erhalten wir für die Kohomologie in diesem Fall

$$H^p(\check{C}^\bullet(\vec{e})) = \begin{cases} A \cdot \dfrac{1}{x_0^{-e_0} \ldots x_n^{-e_n}} & , \quad p = n \\ \quad 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

Da $e_i < 0$ bzw. $e_i - 1 \leq 0$ können wir den Fall $p = n$ auch wie folgt schreiben

$$\frac{1}{x_0 \ldots x_n} A \cdot \frac{1}{x_0^{e_0 - 1} \ldots x_n^{e_n - 1}}$$

Damit ergibt die direkte Summe über alle $\vec{e} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ mit $e_0 + \cdots + e_n = d$ die im Lemma behauptete Kohomologie für $p = n$

$$(\frac{1}{x_0 \ldots x_n} A[\frac{1}{x_0}, \ldots, \frac{1}{x_n}])_d$$

Außerdem beeinflusst dieser Fall die Kohomologie für $p \neq n$ nicht.
Fall 2: $NEG(\vec{e}) = \varnothing$. In diesem Fall ist $NEG(\vec{e})$ immer in $\{i_0, \ldots, i_p\}$ enthalten. Der Komplex $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ hat also einen Summanden $A \cdot x_0^{e_0} \ldots x_n^{e_n} (= A$ als A-Moduln) für alle $i_0 < ... < i_p$. Wir vergleichen $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ mit einem anderen Komplex. Betrachte die affine offene Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i=0}^n$ von $Spec(A)$ mit $V_i = Spec(A)$ für alle i und den geordneten Čech-Komplex $\check{C}^\bullet_{ord}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{Spec(A)})$. Da $Spec(A)$ separiert und $\mathcal{O}_{Spec(A)}$ quasi-kohärent ist können wir diesen Komplex zur Berechnung der Kohomologie von $\mathcal{O}_{Spec(A)}$ verwenden. Wir haben also $H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{Spec(A)}) = \mathcal{O}_{Spec(A)}(Spec(A)) = A$ und nach Serre's Affinitätskriterium $H^p(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{Spec(A)}) = 0$ für $p \geq 1$. Nun hat $\check{C}_{ord}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{Spec(A)})$ aber ebenfalls für alle $i_0 < ... < i_p$ einen Summanden A und exakt das gleiche Differential. Das heißt die Komplexe $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ und $\check{C}^\bullet_{ord}(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{Spec(A)})$ sind isomorph und haben daher dieselbe Kohomologie. Da $H^0(C^\bullet(\vec{e})) = ker(d^0) = A \cdot x_0^{e_0} \ldots x_n^{e_n}$ erhalten wir für die Kohomologie in diesem Fall also

$$H^p(\check{C}^\bullet(\vec{e})) = \begin{cases} A \cdot x_0^{e_0} \ldots x_n^{e_n} & , \quad p = 0 \\ \quad 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

Die direkte Summe über alle $\vec{e}$ liefert den im Lemma behaupteten Wert für $p = 0$

$$(A[x_0, \ldots, x_n])_d$$

Außerdem beeinflusst dieser Fall die Kohomologie für $p \neq 0$ nicht.
Fall 3: Als letztes müssen wir zeigen, dass die Komplexe $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ verschwindende

Kohomologiegruppen haben, wenn $NEG(\vec{e})$ weder leer noch $\{0, \ldots, n\}$ ist. Wir können einen Index $i_{fix} \notin NEG(\vec{e})$ wählen. Es gilt dann stets

$$NEG(\vec{e}) \subseteq \{i_0, \ldots, i_p\} \Leftrightarrow NEG(\vec{e}) \subseteq \{i_{fix}, i_0, \ldots, i_p\}$$

Mit dieser Tatsache können wir eine Abbildung $k : \check{C}^{p+1}(\vec{e}) \to \check{C}^p(\vec{e})$ defnieren durch die Vorschrift

$$k(s)_{i_0 \ldots i_p} = s_{i_{fix} i_0 \ldots i_p}$$

Wir rechnen nach, dass k eine Homotopie zwischen der Identität $id : \check{C}^\bullet(\vec{e}) \to \check{C}^\bullet(\vec{e})$ und der Nullabbildung $0 : \check{C}^\bullet(\vec{e}) \to \check{C}^\bullet(\vec{e})$ definiert

$$\begin{aligned}
(\check{d}k + k\check{d})(s)_{i_0 \ldots i_p} &= \check{d}k(s)_{i_0 \ldots i_p} + k\check{d}(s)_{i_0 \ldots i_p} \\
&= \sum_{r=0}^{p} (-1)^r k(s)_{i_0 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p} + \check{d}(s)_{i_{fix} i_0 \ldots i_p} \\
&= \sum_{r=0}^{p} (-1)^r s_{i_{fix} i_0 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p} + s_{\hat{i}_{fix} i_0 \ldots i_p} + \sum_{r=0}^{p} (-1)^{r+1} s_{i_{fix} i_0 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p} \\
&= s_{i_0 \ldots i_p} = (id - 0)(s)_{i_0 \ldots i_p}
\end{aligned}$$

Also sind id und 0 homotop und induzieren daher, wie im ersten Abschnitt bemerkt, dieselben Abbildungen zwischen den Kohomologiegruppen. Die Nullabbildung induziert aber offensichtlich die Nullabbildung zwischen den Kohomologiegruppen und die Identität die Identität zwischen den Kohomologiegruppen. Also ist der Komplex $\check{C}^\bullet(\vec{e})$ azyklisch und wir erhalten die im Lemma behaupteten verschwindenden Kohomologiegruppen für $p \neq 0, n$. $\square$

Satz 7.2 (Der Endlichkeitssatz von Serre)**.** Sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Es gelten:

(i) Für jedes $p \geq 0$ ist $H^p(X, \mathcal{F})$ ein endlich erzeugter A-Modul

(ii) Es gibt ein (von $\mathcal{F}$ abhängiges) $d_0 \in \mathbb{Z}$ mit $H^p(X, \mathcal{F}(d)) = 0$ für jedes $d \geq d_0$

Beweis. (vgl. [Liu02, S.195f, Theorem 3.2])
Die Idee ist, wie im Beweis von Satz 6.6, auf den Fall $X = \mathbb{P}^n_A$ zu reduzieren. Sei wieder $f : X \to \mathbb{P}^n_A$ eine abgeschlossene Immersion. Wir wollen zunächst zeigen, dass für jedes $p \geq 0$

$$H^p(X, \mathcal{F}(d)) = H^p(\mathbb{P}^n_A, (f_*\mathcal{F})(d))$$

Im Beweis von Satz 6.6 haben wir bereits gesehen, dass $(f_*\mathcal{F})(d)$ quasi-kohärent, endlich erzeugt und isomorph zu $f_*(\mathcal{F}(d))$ ist. Da $\mathbb{P}^n_A$ noethersch ist folgt aus Proposition 6.2, dass $(f_*\mathcal{F})(d)$ bzw. $f_*(\mathcal{F}(d))$ sogar kohärent ist. Wir zeigen nun, dass f_* ein exakter Funktor ist: Für $y \in \mathbb{P}^n_A$ haben wir entweder $y \in im(f)$ oder $y \notin im(f)$. Im Fall $y \notin im(f)$ ist, da $im(f) \subseteq \mathbb{P}^n_A$ abgeschlossen ist,

$U = \mathbb{P}^n_A \setminus im(f)$ eine offene Umgebung von y in $\mathbb{P}^n_A$ und wir haben $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = \mathcal{F}(\varnothing) = 0$ für jede offene Teilmenge $V \subseteq U$. Daraus folgt sofort $(f_*\mathcal{F})_y = 0$. Ist andererseits $y = f(x) \in im(f)$, so durchläuft U die offenen Umgebungen von y in $\mathbb{P}^n_A$ genau dann, wenn $f^{-1}(U)$ die offenen Umgebungen von x in X durchläuft, da f ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Wir sehen $(f_*\mathcal{F})_y = \varinjlim_{y \in U}(f_*\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{x \in V} \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_x$. Angenommen wir haben nun eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'' \longrightarrow 0$$

Das bedeutet für jedes $x \in X$ ist die Sequenz zwischen den Halmen

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}'_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{G}''_x \longrightarrow 0$$

exakt. Falls $y = f(x) \in im(f)$ ist das bis auf Isomorphie aber nach bereits Gezeigtem dieselbe Sequenz wie

$$0 \longrightarrow (f_*\mathcal{G}')_y \longrightarrow (f_*\mathcal{G})_y \longrightarrow (f_*\mathcal{G}'')_y \longrightarrow 0$$

Ist andererseits $y \notin im(f)$, so ist diese Sequenz einfach die Nullsequenz, welche exakt ist. Also ist f_* wie behauptet exakt. Ist nun $0 \to \mathcal{G} \to \mathscr{I}^\bullet$ eine injektive Auflösung von einem $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$, so ist $0 \to f_*\mathcal{G} \to f_*\mathscr{I}^\bullet$ zunächst eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}$-Moduln. Wir wissen aber, dass injektive Moduln welk sind und das pushforwards welker Garben wieder welk sind (vgl. Lemma 3.3 und Beispiel (2) davor). Das bedeutet $0 \to f_*\mathcal{G} \to f_*\mathscr{I}^\bullet$ ist eine welke und daher $\Gamma(\mathbb{P}^n_A, -)$-azyklische Auflösung von $f_*\mathcal{G}$. Wir können diese also zur Berechnung von $H^p(\mathbb{P}^n_A, f_*\mathcal{G})$ verwenden. Aber per Definition von f_* liefert Anwenden von $\Gamma(\mathbb{P}^n_A, -)$ auf $0 \to f_*\mathcal{G} \to f_*\mathscr{I}^\bullet$ den selben Komplex wie Anwenden von $\Gamma(X, -)$ auf $0 \to \mathcal{G} \to \mathscr{I}^\bullet$. Es folgt $H^p(X, \mathcal{G}) = H^p(\mathbb{P}^n_A, f_*\mathcal{G})$. Wählen wir nun $\mathcal{G} = \mathcal{F}(d)$, so erhalten wir mit zuvor Gesehenem

$$H^p(X, \mathcal{F}(d)) = H^p(\mathbb{P}^n_A, (f_*\mathcal{F})(d))$$

Damit ist der Reduktionsschritt getan und wir können von $X = \mathbb{P}^n_A$ ausgehen. Dann wird X von $n+1$ affinen offenen Mengen überdeckt und wir haben $H^p(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{F}) = 0$ für $p \geq n+1$ nach Korollar 5.4. Die Aussagen des Satzes sind also für $p \geq n+1$ bewiesen und wir können den Beweis durch absteigende Induktion über p abschließen. Angenommen die Aussagen des Satzes gelten für $p+1$. Nach der Bemerkung nach Korollar 6.7 existieren $m \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$ und eine exakte Sequenz kohärenter Garben

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_X(m)^r \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Wegen Flachheit von $\mathcal{O}_X(d)$, $d \in \mathbb{Z}$, erhalten wir durch Tensorieren eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_X(m+d)^r \longrightarrow \mathcal{F}(d) \longrightarrow 0$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz gibt uns schließlich die exakte Teilsequenz

$$H^p(X, \mathcal{O}_X(m+d)^r) \xrightarrow{\alpha} H^p(X, \mathcal{F}(d)) \xrightarrow{\beta} H^{p+1}(X, \mathcal{G}(d))$$

Daraus folgen nun sofort die beiden Aussagen des Endlichkeitssatzes:
(i) Setze $d = 0$ und betrachte die induzierte kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow im(\alpha) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow im(\beta) \longrightarrow 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $H^{p+1}(X, \mathcal{G})$ endlich erzeugt. Da A nach Voraussetzung noethersch ist, ist also der A-Untermodul $im(\beta)$ ebenfalls endlich erzeugt. Nach Lemma 7.1 ist auch $H^p(X, \mathcal{O}_X(m)^r)$ endlich erzeugt. Damit ist auch $H^p(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugt und Teil (i) des Satzes ist bewiesen.
(ii) Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $d_0 \in \mathbb{Z}$ mit $H^{p+1}(X, \mathcal{G}(d)) = 0$ für jedes $d \geq d_0$. Nachdem wir d_0 gegebenfalls vergrößern ist nach Lemma 7.1 auch $H^p(X, \mathcal{O}_X(m+d)^r) = 0$ für alle $d \geq d_0$. Wegen Exaktheit der obigen Sequenz folgt daraus $H^p(X, \mathcal{F}(d)) = 0$ für alle $d \geq d_0$ und Teil (ii) des Satzes ist ebenfalls bewiesen. □

Bemerkung. Der Endlichkeitssatz ist allgemeiner für eigentliche A-Schemata richtig (vgl. [Liu02, S. 196, Remark 3.3]). Dazu ist noch etwas Zusatzarbeit notwendig und man benutzt unter anderem Chow's Lemma (vgl. [Liu02, S. 109, Remark 3.34]), das es teilweise erlaubt Aussagen über projektive Morphismen bzw. Schemata auf eigentliche Morphismen bzw. Schemata zu erweitern.

Literatur

[AGV71] Artin, Michael ; Grothendieck, Alexander ; Verdier, Jean-Louis: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 269, 270, 305: *Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas I, II, III*. Springer, 1971

[Bos13] Bosch, Siegfried: *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. London [u.a.] : Springer, 2013. – ISBN 1447148282

[CK03] Chěnevert, Gabriel ; Kassaei, Payman: *Sheaf Cohomology*. http://www.math.mcgill.ca, 2003

[GW10] Görtz, Ulrich ; Wedhorn, Torsten: *Algebraic Geometry I: Schemes With Examples and Exercises*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2010. – ISBN 3834897221

[Har77] Hartshorne, Robin: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 52: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977

[Liu02] Liu, Qing: *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 6: *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford : Oxford University Press, 2002. – xvi+576 S. – Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications

[Sta18] Stacks project authors, The: *The Stacks project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018

Versicherung an Eides Statt

Ich versichere an Eides statt durch meine untenstehende Unterschrift,

- dass ich die vorliegende Arbeit - mit Ausnahme der Anleitung durch die Betreuer - selbstständig ohne fremde Hilfe angefertigt habe und
- dass ich alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus fremden Quellen entnommen sind, entsprechend als Zitate gekennzeichnet habe und
- dass ich ausschließlich die angegebenen Quellen (Literatur, Internetseiten, sonstige Hilfsmittel) verwendet habe und
- dass ich alle entsprechenden Angaben nach bestem Wissen und Gewissen vorgenommen habe, dass sie der Wahrheit entsprechen und dass ich nichts verschwiegen habe.

Mir ist bekannt, dass eine falsche Versicherung and Eides Statt nach §156 und nach §163 Abs. 1 des Strafgesetzbuches mit Freiheitsstrafe oder Geldstrafe bestraft wird.

____
Ort, Datum

____
Name, Vorname