

# Über den Modulstack der Vektorbündel auf Kurven

Diplomarbeit  
von Jochen Heinloth

Bonn, Juni 1998



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1 Algebraische Stacks</b>	<b>5</b>
1.1 Ein Beispiel . . . . .	5
1.2 Definition von Stacks . . . . .	6
1.2.1 Erste Beschreibung: Garben von Kategorien . . . . .	6
1.2.2 Algebraische Stacks - Modulmultiplizitäten . . . . .	12
1.2.3 Eine andere Beschreibung: Algebraische Stacks als Gruppoide . . . . .	16
1.2.4 Vergleich mit der üblichen Definition . . . . .	26
1.3 Weitere Eigenschaften algebraischer Stacks . . . . .	27
1.3.1 Grobe Modulräume . . . . .	27
1.3.2 Eigenschaften von Morphismen . . . . .	28
1.3.3 Topologische Eigenschaften von Modulmultiplizitäten . . . . .	29
1.3.4 Der Situs $\mathcal{M}_{glatt}$ - Kohomologie von Garben auf Stacks . . . . .	30
1.3.5 Differentiale . . . . .	31
<b>2 Modulstack der Vektorbündel auf einer Kurve</b>	<b>38</b>
2.1 Definition und einige Eigenschaften des Stacks . . . . .	38
2.1.1 Beispiel: $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d}$ . . . . .	39
2.1.2 Die analogen Ergebnisse für beliebige Kurven . . . . .	42
2.2 Der Kohomologiering . . . . .	46
2.2.1 Die Gysin-Sequenz für die Stratifizierung zerfällt . . . . .	46
2.2.2 Die Weil-Vermutungen für $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$ . . . . .	51
2.2.3 Der Kohomologiering $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l)$ . . . . .	55
2.3 Der Modulraum der semistabilen Bündel . . . . .	59
<b>A Algebraische Räume</b>	<b>62</b>

# Einleitung

Diese Arbeit ist ein Versuch, das Konzept der algebraischen Stacks zu verstehen, das bei der Suche nach Modulräumen auftaucht:

Man könnte zum Beispiel versuchen, den Raum der Vektorbündel auf einer Kurve  $C$  zu beschreiben, das heißt man betrachtet den Funktor:

$$\begin{aligned} Sch/S &\rightarrow Ens \\ X &\mapsto \{\text{Isomorphieklassen von Vektorbündeln auf } X \times C\} \end{aligned}$$

und sucht ein Schema  $\mathcal{M}$ , so daß

$$Hom(X, \mathcal{M}) = \text{Isomorphieklassen von Vektorbündeln auf } X \times C$$

ist. Dabei stellt sich zunächst das Problem, daß es so ein  $\mathcal{M}$  nicht geben kann, weil Vektorbündel Automorphismen haben. Anders gesagt, man kann Abbildungen  $X \rightarrow \mathcal{M}$  beschreiben, indem man sie auf einer Überdeckung von  $X$  angibt, aber Vektorbündel, die auf einer Überdeckung gegeben sind, kann man verschieden verkleben.

Nun gibt es (wenigstens) zwei Wege, dieses Problem zu umgehen. Zum einen kann man statt der Isomorphieklassen der Vektorbündel die Kategorie der Vektorbündel auf  $X \times C$  betrachten und versuchen, geometrische Eigenschaften solcher Funktoren zu finden.

Eine andere Möglichkeit ist der Zugang über geometrische Invariantentheorie [MFK94]. Dazu gibt man den Objekten zunächst Zusatzstrukturen, die das Modulproblem starr machen, das heißt solche, die sicherstellen, daß die Objekte keine nichttrivialen Automorphismen besitzen, die die Zusatzstruktur respektieren. Im Beispiel der Vektorbündel kann man Vektorbündel  $\mathcal{E}$  zusammen mit einer Basis globaler Schnitte von  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$  betrachten, wobei  $\mathcal{L}$  ein genügend reichhaltiges<sup>1</sup> Linienbündel ist.

Um nun den gesuchten Modulraum zu finden, kann man jetzt versuchen, den Quotienten zu bilden, der diejenigen Bündel mit Zusatzstruktur identifiziert, die als Bündel ohne weitere Struktur isomorph sind. Im obigen Beispiel wäre dies durch die Operation einer  $GL_N$  gegeben, die die möglichen Wahlen der Schnitte identifiziert. Solche Gruppenoperationen besitzen aber in der Regel keinen guten Quotienten, schon deshalb, weil Stabilisatoren auftauchen können. Statt des klassischen Ansatzes, sich nun auf stabile Objekte zu beschränken, indem man sich auf den Teil der Bündel einschränkt, für den ein guter Quotient existiert, kann man auch versuchen, die gesamte Gruppenoperation mit ihren Stabilisatoren zu betrachten, indem man einen Quotienten mit der zusätzlichen Information der

---

<sup>1</sup>englisch: „ample“

Stabilisatoren angibt. Formal identifiziert man dazu diejenigen Operationen, die den gleichen Quotienten mit den gleichen Standgruppen ergeben. Diese Konstruktion liefert den gleichen Begriff wie der abstrakte Zugang, hat aber den Nachteil, daß sich kategorielle Konstruktionen auf diese Weise nicht gut formulieren lassen.

Mit beiden Zugängen erhält man nun keine neue Kategorie *Stacks*, sondern eine 2-Kategorie, das heißt  $\text{Hom}_{\text{Stacks}}(\mathcal{X}, \mathcal{M})$  ist keine Menge, sondern selbst eine Kategorie. Das kommt daher, daß man schon im Beispiel der Vektorbündel notwendigerweise den Morphismen  $X \rightarrow \mathcal{M}$  in den Stack der Vektorbündel die Automorphismen des zu der Abbildung gehörenden Bündels als „Homotopien“ zuordnen muß.

Für die so definierten Stacks kann man trotzdem viele Konzepte der algebraischen Geometrie übertragen: topologische Eigenschaften wie Zusammenhangskomponenten, irreduzible Komponenten, Eigenschaften von Morphismen wie glatt, separiert, Einbettungen, Unterstacks und auch Garben und Garbenkohomologie.

Diese Definitionen sind in der Literatur jedoch nicht gut dokumentiert. Zum ersten Mal werden algebraische Stacks von Deligne und Mumford [DM69] definiert. Sie geben dort viele Resultate an, jedoch keine Beweise. Artin hat dann in [Art74] die Definition verallgemeinert, er gibt jedoch wiederum keine Beweise für die grundlegenden Sätze an. Allerdings weist er auf den Zusammenhang der beiden oben angegebenen Zugänge hin. Schließlich findet sich auch in [FC90] eine kurze, nützliche Zusammenfassung der Resultate.

Im Preprint [Lau88] von Laumon werden die meisten der grundlegenden Sätze bewiesen, leider wählt Laumon einen sehr allgemeinen, formalen Zugang. Aus dieser Quelle habe ich den Abschnitt über den Tangentialstack weitgehend übernommen, die Definition der relativen Differentiale ist ebenfalls nur eine elementarere Formulierung des dort allgemeiner formulierten Kotangentialkomplexes.

Hier werde ich nun im ersten Kapitel die allgemeinen Definitionen algebraischer Stacks und ihrer Eigenschaften geben und einige Resultate zeigen. Dabei gehe ich wie oben beschrieben vor. Zunächst wird eine allgemeine Definition algebraischer Stacks gegeben. Das wichtigste Resultat ist dann die Äquivalenz zu der Beschreibung durch Quotienten in Abschnitt 1.2.3. Im Abschnitt 1.3 werden dann Eigenschaften algebraischer Stacks zusammengestellt, wobei ich die Auswahl danach gerichtet habe, was in Kapitel 2 benötigt wird.

Im zweiten Kapitel wird als Anwendung dieser allgemeinen Theorie der Kohomologiering des Modulstacks der Vektorbündel (vom Rang  $n$  und Grad  $d$ ) auf einer Kurve ausgerechnet:

**Satz 2.2.8** *Für glatte, geometrisch irreduzible, projektive Kurven  $C/\mathbb{F}_q$  vom Geschlecht  $g$  gilt:<sup>2</sup>*

$$H_{\text{glatt}}^*(\overline{\text{Vekt}}_C^{\text{rang}=n, \text{deg}=d}, \mathbb{Q}_l) = \mathbb{Q}_l[c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_{n-1}] \otimes \bigwedge_{i=1}^n [a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(2g)}]$$

*Dabei sind  $c_i, b_i$  freie Erzeuger im Grad  $2i$  und  $a_i^{(k)}$  äußere Erzeuger im Grad  $2i - 1$ .*

*Die Erzeuger sind als Künneth-Komponenten der Chern-Klassen des universellen Vektorbündels auf  $\text{Vekt}_C^{n,d} \times C$  gegeben.*

---

<sup>2</sup>Bezeichne mit  $\overline{\text{Vekt}}_C := \text{Vekt}_C \times \mathbb{F}_q$

Dieses Ergebnis wurde von Atiyah und Bott [AB82] im komplex analytischen Kontext (sogar mit ganzzahligen Koeffizienten für leicht modifizierte Erzeuger) bewiesen. Dort wird nicht der Stack, sondern eine geometrische Realisierung des Stacks als unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit betrachtet. Beim Versuch, den Beweis auf den algebraischen Fall zu übertragen, stellt man fest, daß viele Argumente implizit schon in Termen des Stacks formuliert sind. Zwei Punkte lassen sich aber nicht übertragen. Zum einen benötigt man eine Abschätzung für die Dimensionen der Kohomologiegruppen, für welche ein topologischer Satz von Thom verwendet wird, und zum anderen werden Relationen der Erzeuger durch eine Zellenzerlegung der Kurve und Bott-Periodizität ausgeschlossen.

Der letzte Punkt läßt sich dadurch umgehen, daß man genügend viele Familien von Vektorbündeln konstruiert, deren Chern-Klassen dann insgesamt jede Relation zwischen den Erzeugern bemerken würden. Dazu genügen sogar Summen von Linienbündeln, womit man außerdem erhält:

**Folgerung 2.2.9** *Die Restriktion  $H^*(\overline{\text{Vekt}}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{l^*} H^*(\overline{\text{Vekt}}_C^{n,d, \text{nicht semistabil}}, \mathbb{Q}_l)$  ist injektiv.*

Die Dimensionen der Kohomologiegruppen könnte man aus der Zetafunktion des Stacks ausrechnen, wenn man die Weil-Vermutungen, insbesondere die Lefschetz-Spurformel für den Stack der Vektorbündel kennen würde. Die Zetafunktion des Stacks wurde von Harder und Narasimhan [HN73] berechnet. Die Lefschetz-Spurformel wird in [Beh93] für eine große Klasse algebraischer Stacks bewiesen, zu der der Stack der Vektorbündel aber nicht gehört. Allerdings ist der Stack durch Unterstacks stratifiziert, die den Bedingungen aus [Beh93] genügen. Aus der Gysin-Sequenz für die Stratifizierung kann man dann die Formel auch für den gesamten Stack erhalten. Hierbei wird ein weiteres Resultat aus [AB82] übertragen, das dort mit Hilfe äquivarianter Morse-Theorie formuliert wird. Schließlich wird die Weil-Vermutung über die Eigenwerte des Frobenius auf der Kohomologie aus einer speziellen Überdeckung abgeleitet.

Hieraus ergibt sich die Frage nach den Relationen der Erzeugenden in der Kohomologie des Modulraums der semistabilen Bündel. Diese sind nur für Vektorbündel vom Rang 2 mit ungeradem Grad bekannt.

Mit diesem Fall habe ich mich längere Zeit beschäftigt. Leider ist mir dabei ein dummer Fehler unterlaufen, weshalb ich nur einen sehr kurzen Abschnitt über den Modulraum der semistabilen Bündel anbieten kann. Hier wird gezeigt, daß sich im Fall Rang 2 und geradem Grad der Bündel, in dem man kein feines Modulschema findet, die Resultate über die Relationen zwischen den Erzeugern, die man für den Fall, daß der Grad ungerade ist, kennt, auf den Stack der Vektorbündel übertragen lassen.

Abschließend möchte ich mich bei Prof. Harder für die Anregung dieser Arbeit und die Betreuung in vielen fruchtbaren Gesprächen bedanken. Bedanken möchte ich mich außerdem bei Michael Adam, Franziska Bittner, Alexander Caspar und Markus Spitzweck, die Teile dieser Arbeit korrektur gelesen und viele gute Verbesserungsvorschläge gemacht haben.

Bonn, im Juni 1998

Jochen Heinloth

## Kapitel 1

# Algebraische „Stacks“- Modulmultiplizitäten<sup>1</sup>

### 1.1 Ein Beispiel

Will man einen Funktor, wie zum Beispiel Vektorbündel über einem Schema, darstellen, das heißt möchte man alle Vektorbündel über dem Schema parametrisieren, tritt häufig das Problem auf, daß die darzustellenden Objekte Automorphismen haben und deshalb nicht durch lokale Daten beschrieben werden. Der Funktor ist damit (meist) noch nicht einmal eine Garbe, was  $Hom(-, \mathcal{M})$  aber immer ist. Betrachte beispielsweise den Funktor

$$\begin{aligned} (BGL =) \mathcal{Vekt} : Sch/S &\rightarrow Ens \\ X &\mapsto \{\text{Vektorbündel auf } X\} / \text{Isomorphie.} \end{aligned}$$

Jedes Vektorbündel ist lokal trivial, das heißt auf kleinen offenen Mengen gibt es jeweils nur *eine* Isomorphieklasse. Wenn  $\mathcal{Vekt}$  eine Garbe sein wollte, dürfte es dann aber auch auf beliebigen Mengen nur eine Isomorphieklasse geben. Dort gibt es aber komplizierte Vektorbündel.

Anders gesagt: Sei  $BGL$  ein (potentielles) darstellendes Objekt für den Funktor  $\mathcal{Vekt}$ . Ist  $X$  ein Schema,  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel auf  $X$  und  $(U_i)$  eine trivialisierende Überdeckung für  $\mathcal{E}$ . Dann induzieren  $\mathcal{E}$  und die Einschränkung von  $\mathcal{E}$  auf  $(U_i)$  Morphismen nach  $BGL$ . Der Morphismus von  $X$  ist durch die Morphismen auf der Überdeckung  $(U_i)$  bestimmt. Auf  $(U_i)$  ist  $\mathcal{E}$  aber trivial, also faktorisieren die Morphismen durch den des trivialen Bündels,  $* \rightarrow BGL$  (\* mein Basisschema, der „Punkt“). Also kann man auch auf  $X$  nur einen Morphismus erhalten, der durch den des trivialen Bündels faktorisiert. Dieser entspricht dann aber dem trivialen Bündel auf  $X$  ( $BGL$  hat also auch nur einen \*-Punkt):

$$\begin{array}{ccc} (U_i) & \xrightarrow{\text{triviales Bündel}} & BGL \\ \downarrow & & \uparrow \\ X & \dashrightarrow & BGL \end{array}$$

---

<sup>1</sup>In Grothendiecks Esquisse d'un Programme [Gro84] wird der Begriff „multiplicité modulaire“ verwendet, der mir im Moment gerade gut gefällt.

Diesen Ärger handelt man sich dadurch ein, daß man nur Isomorphieklassen von Vektorbündeln betrachtet. Würde man jedem Schema  $X$  die Kategorie der Vektorbündel über  $X$  zuordnen und den Morphismen in ein darstellendes Objekt die Automorphismen des Bündels (als Homotopien) erlauben, wäre die Kommutativität des Diagramms nur noch bis auf Homotopie nötig, und so könnte ein  $BGL$  auch kompliziertere Bündel klassifizieren. Schließlich definiert man Bündel ja durch Verklebedaten. (Das ist dann die gleiche Strategie wie die der Topologie, die ja sehr wohl klassifizierende Räume für Vektorbündel kennt.)

$$\begin{array}{ccc} (U_i) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ X & \xrightarrow{\quad} & BGL \end{array} \quad \begin{array}{c} \approx \\ \approx \\ \approx \end{array}$$

Ein Stack wird also zunächst eine Verallgemeinerung einer Garbe sein, die eben nicht mehr Werte in Mengen hat, sondern den Objekten über einer offenen Menge Automorphismen gestattet. Ein Stack soll also Werte in Kategorien haben, in denen alle Morphismen Isomorphismen sind, das heißt in Gruppoiden (§1.2.1).

Dann werden zusätzliche Bedingungen für Stacks über Schemata gestellt, damit sich diese möglichst wie Schemata verhalten (sie sollen lokal in irgendeiner Topologie aussehen wie Schemata, §1.2.2). Diese Bedingungen kann man dann auch so formulieren, daß ein Stack ein Quotient von einem Schema nach einer Gruppenoperation – bzw. allgemeiner Quotient von einem algebraischen Gruppoid – ist (§1.2.3).

Die Bedingungen sehen für  $\mathcal{Vekt}$  oder  $BG = \{\text{Prinzipalbündel einer beliebigen algebraischen Gruppe}\}$  dann so aus:

Erstens sind die Automorphismen eines Bündels eine algebraische Gruppe. Zweitens gibt es ein „erstarrtes“ Modulproblem für  $\mathcal{Vekt}$ , nämlich  $\{\text{Vektorbündel mit einer globalen Trivialisierung}\}$ , welches ein darstellbarer (wenn auch trivialer) Funktor ist. Lokal läßt aber jedes Bündel solch eine Erstarrung zu. Damit muß man den Vergiß-die-Trivialisierung-Funktor nur genügend garbig machen, und man erhält eine Überdeckung von  $\mathcal{Vekt}$  durch einen darstellbaren Funktor, also durch ein Schema. Dabei entspricht der Vergiß-Funktor der Quotientenabbildung nach der  $GL$ -Operation auf den möglichen Trivialisierungen.

## 1.2 Definition von Stacks

### 1.2.1 Erste Beschreibung: Garben von Kategorien

Sei  $(Sch/S, \mathcal{T}_{glatt})$  irgendeine Kategorie mit Grothendieck-Topologie. In den Beispielen ist dies immer die Kategorie der Schemata über einem Basisschema  $S$  mit der glatten Topologie, das heißt eine Überdeckung ist eine surjektive Familie glatter Abbildungen  $(f_i : U_i \rightarrow X)_{i \in I}$  von Schemata über  $S$ . Ich könnte für die Beispiele genauso gut die gröbere étale – oder auch eine feinere flache, also fpqc (treuflach und quasikompakt) oder fppf (treuflach und endliche Präsentation) – Topologie benutzen. Erst später ist die glatte Topologie für mich praktischer.

Dabei habe ich immer das Beispiel des letzten Abschnitts im Sinn: Ich möchte zum Beispiel Vektorbündel über  $S$  klassifizieren (oder auch Kurven über  $S$ ). Dazu möchte ich jedem

Schema  $X$  über  $S$  die Kategorie der Vektorbündel (oder Kurvenbündel) auf  $X$  zuordnen. Das führt zu folgender

**Definition 1.2.1** Eine Prägarbe von Kategorien ist ein Funktor:

$2\text{Cat}((\text{Sch}/S)^{\text{opp}}) \rightarrow \text{Cat}$  von 2-Kategorien<sup>2</sup>, besteht also aus folgenden Daten:

1. Jedem Objekt wird eine Kategorie zugeordnet:  $X \in \text{Sch}/S \mapsto \mathcal{C}_X$ .
2. Jedem Morphismus ein Funktor:  $(f : X \rightarrow Y) \mapsto f^* : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$ .
3. Jedem Paar von verkettbaren Morphismen eine invertierbare natürliche Transformation:

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \\ \searrow \text{gof} \nearrow \end{array} \mapsto F_{g \circ f} : (g \circ f)^* \implies f^* \circ g^*,$$

so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & (g \circ f)^* \circ h^* & \\ \begin{array}{c} \nearrow F_{h \circ (g \circ f)} \\ \searrow F_{(h \circ g) \circ f} \end{array} & & \begin{array}{c} \searrow F_{g \circ f \circ \text{Id}_{h^*}} \\ \nearrow \text{Id}_{f^*} \circ F_{h \circ g} \end{array} \\ (h \circ g \circ f)^* & & f^* \circ g^* \circ h^* \\ & f^* \circ (h \circ g)^* & \end{array}$$

Das kann man auch als Tetraeder hinmalen (dessen Ecken die 4 Kategorien sind, zwischen denen man als Kanten die Funktoren  $f^*, g^*$  usw. gegeben hat, auf den Seitenflächen hat man jeweils eine Transformation  $F$ ).

Eine Prägarbe von Kategorien heißt Garbe, wenn weiter gilt:

4. Man kann Objekte in der Topologie verkleben, das heißt jedes Abstiegsdatum ist effektiv:

Sind  $(U_i) \xrightarrow{f_i} X$  eine Überdeckung von  $X$ ,  $u_i$  Objekte in  $\mathcal{C}_{U_i}$  und  $\phi_{ij} : p_i^*(u_i) \rightarrow p_j^*(u_j)$  Isomorphismen in  $\mathcal{C}_{U_i \times U_j} =: \mathcal{C}_{U_{ij}}$ , so daß in  $\mathcal{C}_{U_{ijk}}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} p_i^*(p_i^*(u_i)) & \xrightarrow{p_{ij}^*(\phi_{ij})} & p_j^*(p_j^*(u_j)) & \xrightarrow{F_{p_j \circ p_{ij} = p_j \circ p_{jk}}} & p_k^*(p_k^*(u_k)) & \xrightarrow{p_{jk}^*(\phi)} & p_k^*(p_k^*(u_k)) \\ & \searrow F_{p_i \circ p_{ij} = p_i \circ p_{ik}} & & & & & \\ & & p_i^*(p_i^*(u_i)) & \xrightarrow{p_{ik}^*(\phi)} & p_k^*(p_k^*(u_k)) & & \end{array}$$

kommutiert, so gibt es ein bis auf Isomorphismus eindeutiges  $x \in \mathcal{C}_X$ , zusammen mit  $\psi_i : f_i^* x \xrightarrow{\cong} p_i^*(u_i)$ , so daß  $p_j^*(\psi_j) p_i^*(\psi_i)^{-1} = \phi_{ij}$  ist.

<sup>2</sup>Dabei bezeichnet  $2\text{Cat}(\text{Sch}/S)$  die 2-Kategorie, die man erhält, indem man die Hom-Mengen von  $\text{Sch}/S$  als Kategorien auffaßt, die nur Identitäten als Morphismen haben.

5. Man kann Morphismen verkleben:

Sind  $x_1, x_2 \in \mathcal{C}_X$  zwei Objekte, so ist die Prägarbe (auf  $Sch/X$ )

$$(U \xrightarrow{f} X) \mapsto Hom_{\mathcal{C}_U}(f^*x_1, f^*x_2)$$

eine Garbe.

**Bemerkung:** 1. Das Tetraederaxiom (3.) bedeutet nur, daß die Prägarbe vom Verkleben der Morphismen (5.) wirklich eine Prägarbe ist, die Einschränkungsabbildungen also transitiv sind.

2. Die Forderung für das Verkleben von Objekten ist nur die formale Kozykelbedingung, die man zum Beispiel auch für Vektorbündel hinschreibt,  $\phi_i$  sind dann die Verklebeautomorphismen. Das sieht dort einfacher aus, weil man die kanonischen Isomorphismen  $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$  unterschlägt, womit die  $F$ 's aus dem Diagramm verschwinden.

**Definition 1.2.2** Sind die Kategorien  $\mathcal{C}_X$  alle Gruppoide, das heißt sind alle Morphismen Isomorphismen, so heißt eine Garbe von Kategorien Stack<sup>3</sup>.

**Beispiel:** Sei wie vereinbart ( $Sch/S, \mathcal{T}_{glatt}$ ) die Kategorie der Schemata über  $S$  mit der glatten Topologie. Dann bilden die Vektorbündel folgenden Stack  $\mathcal{Vekt}$  auf  $Sch/S$ :

1.  $\mathcal{Vekt}(X)$  = Kategorie der Vektorbündel über  $X$  (Die Morphismen sind die Isomorphismen von Bündeln)
2.  $X \xrightarrow{f} Y$  wird der Funktor  $f^*$  zugeordnet.
3. Die Bündel  $g^*f^*\mathcal{E} \cong (f \circ g)^*\mathcal{E}$  sind *natürlich* isomorph, das ist genau die Forderung des Tetraederaxioms.
4. Vektorbündel verkleben in der glatten (oder auch étalen, fpqc) Topologie (weil quasi-kohärente Garben das tun, und lokal freie Garben zu lokal freien verkleben).
5. Morphismen bilden eine Garbe (gleiches Argument).

Damit sieht man, daß sogar quasi-kohärente Garben einen Stack bilden.

**Zweites Beispiel:** (langweilige Stacks) Jede Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $Sch/S$  ist auch ein Stack, indem man die Mengen  $\mathcal{F}(X)$  wieder als Kategorien auffaßt, die nur Identitäten als Morphismen haben. Damit liefert auch jedes Schema  $X$  einen Stack  $Hom_{Sch/S}(-, X) =: \underline{X}$ .

**Notation:** Im folgenden stehen, soweit nicht anders gesagt, Großbuchstaben  $X, Y, S, T, U$  für Schemata und kalligraphische Großbuchstaben  $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{S}$  für Stacks.

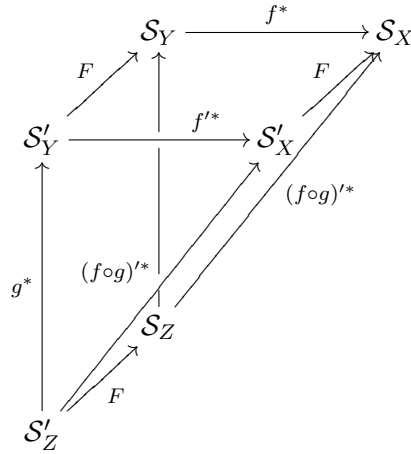
**Bemerkung 0:** Üblicherweise definiert man Stacks ein wenig anders, die Äquivalenz der beiden Definitionen zeige ich im Abschnitt 1.2.4.

**Bemerkung 1:** *Morphismen von Stacks*, Stacks bilden eine 2-Kategorie  $\mathcal{Stacks}_S$ :

Ein Morphismus  $\mathcal{S}' \xrightarrow{F} \mathcal{S} \in Hom_{\mathcal{Stacks}}(\mathcal{S}', \mathcal{S})$  ist eine Transformation von Funktoren von 2-Kategorien, besteht also aus:

<sup>3</sup>Die übliche Konvention bezeichnet schon eine Garbe von Kategorien als Stack, um dann unmittelbar die Bezeichnung "Stack von Gruppoïden" wieder durch "Stack" zu ersetzen.

- zu jedem  $X \in Sch/S$  einem Funktor  $F_X : \mathcal{S}'_X \rightarrow \mathcal{S}_X$
- zu jedem Morphismus  $X \xrightarrow{f} Y$  einer (invertierbaren) natürlichen Transformation<sup>4</sup>  $F_f : f'^* \circ F_X \Rightarrow F_Y \circ f^*$ , die verträglich mit den Transformationen  $f^*g^* \Rightarrow (gf)^*$  ist. (d. h. das Diagramm



in dem man in allen Seitenflächen einen 2-Morphismus hat, kommutiert.)

Das liefert aber „nur“ eine Kategorie  $Hom(\mathcal{S}', \mathcal{S})$  (und keine Menge), da die Funktoren  $F_X$  jeweils nur eine Kategorie bilden:

Ein 2-Morphismus  $\mathcal{S}' \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{matrix} \mathcal{S}$  besteht aus natürlichen Transformationen  $\psi_X$ , die in kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_X & \xrightarrow{\psi_X} & G_X \\ F_f \downarrow & & \downarrow G_f \\ F'_X & \xrightarrow{\psi'_X} & G'_X \end{array}$$

passen.

Die Axiome für 2-Kategorien ergeben sich aus denen von  $\mathcal{C}at$ , der 2-Kategorie der Kategorien.

**Beispiele:** (1) Ist  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel auf einem Schema  $X$ , so definiert dies einen Morphismus  $\underline{X} \xrightarrow{E} \mathcal{V}ekt$ :

$$Hom(U, X) \ni (U \xrightarrow{f} X) \mapsto f^*(\mathcal{E}) \in \mathcal{V}ekt_U$$

Jeder Automorphismus  $\phi$  von  $\mathcal{E}$  definiert dann einen 2-Automorphismus  $\Phi : E \rightarrow E$ , durch  $f^*\mathcal{E} \xrightarrow{f^*(\phi)} f^*\mathcal{E}$ .

(2) Sind  $H \subset G$  algebraische Gruppen (über  $S$ ), und bezeichnet  $BG$  (bzw.  $BH$ ) den Stack der  $G$ -Prinzipalbündel, so hat man einen Morphismus  $BH \rightarrow BG$ , durch Erweiterung

<sup>4</sup>  $f'^*$  bezeichnet den Pull-Back in  $\mathcal{S}'$

der Strukturgruppe  $\tilde{X} \mapsto G \times_H \tilde{X}$ . Jedes Element von  $G(S)$  definiert dann wie oben einen 2-Morphismus. So entsteht zum Beispiel für  $SO \subset GL$  auch der Vergißfunktorkomplex vom Stack der Vektorbündel zusammen mit einem Skalarprodukt in den Stack der Bündel ohne zusätzliche Struktur.

Am ersten Beispiel kann man zwei Verallgemeinerungen ablesen:

(1) Man kann die Kategorie der Garben (als 2-Kategorie, die nur Identitäten als 2-Morphismen hat) in Stacks einbetten. Das „einbetten“ bedeutet, daß die Garben eine volle Unter-2-Kategorie bilden: Ein Morphismus von Stacks, die beide Garben sind, ist automatisch einer von Garben, da beide nur triviale 2-Morphismen haben. Damit kann ich auch  $Sch/S$  wie oben als  $\underline{X} = \text{Hom}(-, X)$  in  $\text{Stacks}/S$  einbetten.

Ein Stack, der isomorph zu einem Schema ist, heißt *darstellbar*. Die obige Bemerkung erlaubt mir, nicht zwischen einem Schema, der Garbe, die es auf  $Sch/S$  definiert und deren Stack zu unterscheiden. Will ich das doch, so bezeichnet  $X$  das Schema,  $\underline{X}$  die Garbe und  $\underline{\underline{X}}$  den Stack.

(2)  $\text{Hom}_{\text{Stacks}}(X, \mathcal{M}) \sim \mathcal{M}_X$ , wobei „ $\sim$ “ Äquivalenz von Kategorien bedeutet (das kennt man von Garben her aus dem Yoneda-Lemma).

Denn: „ $\Rightarrow$ “: Sei  $\underline{x} : X \rightarrow \mathcal{M}$ , das definiert  $\underline{x}(Id_X) \in \mathcal{M}_X$  ( $Id_X \in \text{Hom}_{Sch}(X, X)$ ).

„ $\Leftarrow$ “: Ist  $x \in \mathcal{M}_X$  gegeben, so definiere  $\underline{x} : X \rightarrow \mathcal{M}$  durch:

$$\underline{x}(U \xrightarrow{f} X) = f^*(x) \in \mathcal{M}_U$$

Das sind beides Funktoren, die verkettet zur Identität äquivalent sind.

Fertig.

Deshalb unterscheide ich nicht mehr zwischen  $\underline{x} \in \text{Hom}(X, \mathcal{M})$  und  $x \in \mathcal{M}_X$ .

Im Beispiel der Vektorbündel  $\mathcal{Vekt}$  hat man also auch, daß jeder Morphismus von einem Schema  $X$  nach  $\mathcal{Vekt}$  von einem Vektorbündel herkommt, was man ja von diesem Stack wollte.

**Bemerkung 3:** Es gib (2-)Faserprodukte von Stacks: Man nimmt die Faserprodukte der Kategorien für jedes Objekt in  $Sch/S$ : Seien  $m : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}$  und  $m' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{S}$  Morphismen, dann definiere:

$$\mathcal{M} \times_{m, \mathcal{S}, m'} \mathcal{M}'(U) = \left\langle \begin{array}{l} \text{Obj.: } (u \in \mathcal{M}(U), u' \in \mathcal{M}'(U), \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}(U)}(m(u), m'(u))) \\ \text{Mor.: } \text{Hom}((u, u', \phi), (v, v', \psi)) \\ \quad := \{(u \xrightarrow{f} v, u' \xrightarrow{f'} v') \mid \psi \circ m(f) = \phi \circ m'(f')\} \end{array} \right\rangle$$

Das liefert dann wieder einen Stack. Für das Beispiel  $\mathcal{M} = \mathcal{M}' = \text{Vektorbündel}$  mit Skalarprodukt,  $\mathcal{S} = \mathcal{Vekt}$  und  $m, m'$  beide der Vergißfunktorkomplex, erhält man so als Faserprodukt den Stack der Vektorbündel mit zwei Skalarprodukten (Paare von Vektorbündeln mit Metriken plus einem Isomorphismus der Bündel ohne Zusatzstruktur).

**Beispiel:** Die Faserprodukte von Schemata über einem Stack möchte ich noch interpretieren:

$$X \times_{x, \mathcal{M}, y} Y = \text{Hom}_{\mathcal{M}(\cdot)}(p_1^*x, p_2^*y) \text{ als Garbe auf } Sch/X \times Y$$

Dabei ist  $Hom_{\mathcal{M}(\cdot)}(p_1^*x, p_2^*y)$  die Garbe auf  $Sch_{/X \times Y}$ , die  $U \xrightarrow{h} X \times Y$  die Menge  $Hom_{\mathcal{M}(U)}(h^*p_1^*x, h^*p_2^*y)$  zuordnet. Das sieht man so:

$$\begin{aligned} (X \times Y)_{\mathcal{M}}(U) &= \left\{ \begin{array}{ccc} & X & \\ f \nearrow & \Downarrow \phi & \searrow x \\ U & & \mathcal{M} \\ g \searrow & Y & \nearrow y \end{array} \right\} \\ &= \{(U \xrightarrow{h=(f,g)} X \times Y, \phi \in Hom_{\mathcal{M}_U}(h^*p_1^*(x), h^*p_2^*(y)))\} \\ &\stackrel{Def}{=} Isom(X \times Y, p_1^*(x), p_2^*(y))(U) \end{aligned}$$

Das ist die Menge der Morphismen zwischen den auf  $U$  zurückgezogenen Objekten  $x$  und  $y$ . Das ist im Fall der Vektorbündel für  $\mathcal{E}_X$  auf  $X$  und  $\mathcal{E}_Y$  auf  $Y$  das Faserbündel  $Hom^{\text{invertierbar}}(p_1^*\mathcal{E}_X, p_2^*\mathcal{E}_Y)$  über  $X \times Y$ .

Auch die Automorphismen eines Objekts kann man so beschreiben:

**Behauptung 1.2.3** *Sei  $X$  ein Schema,  $\mathcal{M}$  ein Stack, dann gilt:*

$$X_{(x,x), \mathcal{M} \times \mathcal{M}, \Delta} \times \mathcal{M} = Aut(X, x, x) = Hom_{\mathcal{M}(\cdot)}(x, x).$$

Dabei ist  $Aut(X, x, x)$  wie oben die Garbe  $(U \xrightarrow{f} X) \mapsto Hom_{\mathcal{M}_U}(f^*x, f^*x)$ . Die linke Seite ist aber zunächst nur ein Stack, das „ $\sim$ “ bedeutet Äquivalenz von Stacks.

Für die Bündel kann man das wieder leicht einsehen, denn  $x : X \rightarrow \mathcal{M}$  entspricht dann einem Vektorbündel  $\mathcal{E}$ . Ein Morphismus  $U \rightarrow X \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \mathcal{M}$  entspricht einer Abbildung

$U \xrightarrow{f} X$ , einem Bündel  $\mathcal{F}$  auf  $U$  und zwei Isomorphismen  $\phi_1, \phi_2 : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{E}$ . Damit ist aber  $\mathcal{F}$  kanonisch via  $\phi_1$  zu  $f^*\mathcal{E}$  isomorph, und das Datum ist äquivalent zu einem Automorphismus  $(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})$  von  $f^*\mathcal{E}$ . Allgemein erhält man analog:

**Beweis:**

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \times \mathcal{M}(U) &\sim \left\langle \left( \begin{array}{ccc} & X & \\ f \nearrow & \Downarrow \phi & \searrow (x,x) \\ U & & \mathcal{M} \times \mathcal{M} \\ u \searrow & \mathcal{M} & \nearrow \Delta \end{array} \right) \right\rangle \\ &\sim \left\langle \left( f : U \rightarrow X, U \xrightarrow{(f^*(x), f^*(x))} \mathcal{M} \times \mathcal{M} \right) \right\rangle \\ &\sim \langle (f : U \rightarrow X, u \in \mathcal{M}_U, \phi_1 : f^*x \rightarrow u, \phi_2 : f^*x \rightarrow u) \rangle \end{aligned}$$

*Behauptung:* In dieser Kategorie ist  $Hom(a, b)$  leer oder 1-elementig. (die eckigen Klammern  $\langle \rangle$  benutze ich, weil es sich um Kategorien, nicht um Mengen handelt)

Nach Definition ist  $Hom((u, \phi_1, \phi_2), (v, \psi_1, \psi_2)) = \{\Phi \in Hom(u, v) \mid \psi_i \Phi = \phi_i\}$ , also muß  $\Phi = \psi_i^{-1} \circ \phi_i$  sein.

Damit liefern folgende Abbildungen die gewünschte Äquivalenz der Kategorien:

$$\begin{aligned} (f, u, \phi_1, \phi_2) &\mapsto (f, \phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \\ (f, f^*x, id, \phi) &\leftarrow (f, \phi) \end{aligned}$$

Fertig.

**Notation:** Im folgenden bezeichne ich Kategorien immer mit spitzen Klammern  $\langle \dots \rangle$ . Diese sind als „Die Kategorie der ...“ zu lesen.

## 1.2.2 Algebraische Stacks - Modulmultiplizitäten

Jetzt sei mit  $(Sch/S, \mathcal{T})$  immer die Kategorie der Schemata über  $S$  mit der glatten (oder étalen) Topologie gemeint.

Man möchte nun gerne formulieren, wann ein Stack über  $Sch/S$  algebraisch ist, was bedeuten soll, daß er sich so ähnlich wie ein Schema verhält und man Eigenschaften von Schemata für ihn definieren kann. Dabei ist der erste Schritt folgende

**Definition 1.2.4** ([DM69]) *Ein Morphismus  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$  heißt darstellbar (resp. darstellbar durch algebraische Räume<sup>5</sup>), wenn für jedes Schema  $X \rightarrow \mathcal{S}$  das Faserprodukt  $X \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$  darstellbar, also ein Schema (resp. ein algebraischer Raum) ist.*

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}' & \longrightarrow & \mathcal{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \mathcal{S} \end{array}$$

Eine notwendige (für Morphismen algebraischer Stacks auch hinreichende) Bedingung für die Darstellbarkeit eines Morphismus  $\mathcal{S}' \xrightarrow{F} \mathcal{S}$  ist, daß für alle  $x \in \mathcal{S}'_X$  die Abbildung

$$F_x : \text{Hom}_{\mathcal{S}'_X}(x, x) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{S}_X}(F(x), F(x))$$

injektiv ist,  $F$  also auf den Automorphismengruppen der Objekte injektiv ist. Denn das ist äquivalent zur Bedingung, daß  $X \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$  eine Garbe auf  $Sch/S$  ist. Wird nämlich  $(\phi : x \rightarrow x)$  auf  $Id_{F(x)}$  abgebildet, so ist  $\phi$  auch ein nicht trivialer Automorphismus von  $(Id_X, x) : X \rightarrow X \times_{F(x), \mathcal{S}, F} \mathcal{S}'$ .

Zum Beispiel ist also der Morphismus, der Vektorbündel mit Filtrierung auf die Filtrierungsquotienten abbildet, nicht darstellbar, der umgekehrte Morphismus, der die Quotienten auf ihre direkte Summe abbildet, hingegen schon.

Nun zeige ich erst einmal, daß die Diagonale eines Stacks genau dann darstellbar ist, wenn die Homomorphismen (insbesondere die Automorphismen) der Objekte selbst Schemata sind:

**Behauptung 1.2.5** *Die Diagonale  $\Delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}$  eines Stacks ist genau dann darstellbar, wenn für alle  $X \rightarrow \mathcal{M}, Y \rightarrow \mathcal{M}$  die Garbe  $X \times_{\mathcal{M}} Y = \text{Isom}(X \times Y, p_1^*x, p_2^*y)$  darstellbar ist.*

<sup>5</sup>Das benötigt man nur aus technischen Gründen, es ist eine gute Idee, hier immer „Schema“ statt „algebraischer Raum“ zu lesen. Zur Definition algebraischer Räume sei auf den Anhang verwiesen

**Bemerkung:** Diese Bedingung ist nach Definition äquivalent zur Forderung: Alle Morphismen  $X \rightarrow \mathcal{M}$  sind darstellbar.

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: *Behauptung:* Das folgende Diagramm ist kartesisch:

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \times \mathcal{M} \end{array}$$

Ist die Diagonale darstellbar, so hat man damit gesehen, daß  $X \times Y$  ein Schema ist.

$X \times Y \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}(\cdot)}(p_1^*x, p_2^*y) \cong (X \times Y) \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \mathcal{M}$ , das sieht man wie bei der Berechnung von  $\text{Aut}(X, x, x)$ , wenn man im Beweis zwei verschiedene  $x$ 'e nimmt.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $X \xrightarrow{f} \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  ein Morphismus. Dann sind im folgenden Diagramm die beiden kleinen Quadrate kartesisch, also auch das äußere.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M} \times X & \xlongequal{\quad} & (X \times X) \times X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Delta \\ X \times X & \longrightarrow & X \times X & & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \times f \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \times \mathcal{M} & & \mathcal{M} \times \mathcal{M} \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist  $X \times X$  darstellbar, also ist auch  $X \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \mathcal{M}$ , als Faserprodukt von Schemata, ein Schema.

Fertig.

**Bemerkung:** „Die  $\text{Isom}(\dots)$  Garben sollen Schemata sein“ ist eine Bedingung, die algebraische Stacks erfüllen sollten. Für die  $G$ -Prinzipalbündel einer algebraischen Gruppe ist das der Fall, denn  $\text{Isom}$  ist dann sogar ein Faserbündel mit Faser  $G$ .

**Lemma 1.2.6** 1. Für Morphismen algebraischer Stacks ist die Eigenschaft darstellbar stabil unter beliebigem Basiswechsel.

2.  $\mathcal{M}$  ist darstellbar  $\Leftrightarrow$  Der Strukturmorphismus  $\mathcal{M} \rightarrow S$  ist darstellbar.

3. Sind  $f, g$  darstellbar, so auch  $f \circ g$  und  $f \times g$ .

**Beweis:** zu 1.: Betrachte:

$$\begin{array}{ccccccc} X \times_S \mathcal{M} & \xrightarrow{\cong} & X \times_{\mathcal{M}'} (\mathcal{M}' \times_S \mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{M}' \times_S \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & & \downarrow & & \downarrow f' & & \downarrow f \text{ darstellbar} \\ & & X & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \xrightarrow{\text{beliebig}} & S \end{array}$$

$X \times_S \mathcal{M}$  ist aber nach Voraussetzung darstellbar, also auch  $f'$ .

Der Morphismus aus 2. bildet für ein Schema  $X/S$  die ganze Kategorie  $\mathcal{M}(X)$  auf  $X \rightarrow S$  ab. Damit ist 2. nur eine Umformulierung der Definition. Die 3. Behauptung sieht man wie 1.

Fertig.

Für darstellbare Morphismen von Stacks kann man nun einige Eigenschaften von Morphismen von Schemata übertragen, die lokal im Bild sind:

Sei  $\mathbb{E}$  eine Eigenschaft von Morphismen in  $Sch/S$ , die stabil unter Basiswechsel und lokal im Bild ist, das heißt:

$(X \xrightarrow{f} Y \text{ besitzt } \mathbb{E}) \Leftrightarrow (\text{Es gibt eine Überdeckung } Y' \xrightarrow{\text{cov}} Y, \text{ so daß } f' : X \times_Y Y' \rightarrow X \text{ die Eigenschaft } \mathbb{E} \text{ besitzt})$

**Definition 1.2.7** Ein darstellbarer Morphismus  $S' \rightarrow S$  hat die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ , wenn für alle  $X \rightarrow S$  der Morphismus  $X \times_S S' \rightarrow X$  von Schemata die Eigenschaft  $\mathbb{E}$  hat.

**Bemerkung:** Die Eigenschaften, die für Morphismen und Objekte in *Stacks* definiert worden sind, ergeben für Schemata die alten Begriffe. Ferner kann man mit den Begriffen bei *Stacks* umgehen wie gehabt:

- $\mathbb{E}$  ist stabil unter Basiswechsel (siehe Beweis des voranstehenden Lemmas).
- Haben  $f, g$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ , so auch  $f \circ g$ , wenn das für  $\mathbb{E}$  auf  $Sch/S$  galt.

Man kann also in der glatten (oder étalen oder fpqc) Topologie zum Beispiel folgende Eigenschaften von Morphismen übertragen ([Gro67] §2.7 und §17.7):

surjektiv, flach, unverzweigt, glatt, étale, separiert, quasi-separiert, lokal von endlichem Typ, lokal von endlicher Präsentation, eigentlich, Isomorphismus, Monomorphismus, offene Einbettung, abgeschlossene Einbettung, affin, endlich, ganz.

Insbesondere kann ich also sagen, was eine *Überdeckung* von einem Stack durch ein Schema ist, nämlich ein darstellbarer surjektiver glatter (bzw. étaler oder flacher) Morphismus. Eine Überdeckung stelle ich mir als Lösung eines rigidifizierten Modulproblems vor (siehe Abschnitt 1.2.3). Ähnlich wie im letzten Lemma erhält man:

- $\mathbb{E}$  ist als Eigenschaft darstellbarer Morphismen von Stacks lokal im Bild.

**Definition 1.2.8** Ein Stack  $\mathcal{M}$  über  $(Sch/S, \mathcal{T}_{glatt})$  heißt algebraisch oder Modulmultiplizität, wenn gilt:

1. Die Diagonale  $\mathcal{M} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  ist darstellbar durch algebraische Räume.
2. Es gibt ein Schema  $X$  und einen surjektiven glatten Morphismus  $X \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Definition 1.2.9** Ein Stack  $\mathcal{M}$  über  $(Sch/S, \mathcal{T}_{\acute{e}tale})$  heißt algebraisch nach Artin<sup>6</sup>, wenn gilt:

0.  $\mathcal{M}$  ist limes-erhaltend<sup>7</sup>.
1. Die Diagonale  $\mathcal{M} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  ist darstellbar durch algebraische Räume.
2. Es gibt ein Schema  $X$  und einen surjektiven glatten Morphismus  $X \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Definition 1.2.10** Ein Stack  $\mathcal{M}$  über  $(Sch/S, \mathcal{T}_{\acute{e}tale})$  heißt algebraisch nach Deligne–Mumford oder Deligne–Mumford-Stack, wenn gilt:

1. Die Diagonale  $\mathcal{M} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  ist darstellbar durch Schemata.
0. Die Diagonale ist quasi-kompakt und separiert.
2. Es gibt einen surjektiven étalen Morphismus von einem Schema  $X \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Bemerkung:** Die Forderung für einen Deligne–Mumford-Stack, daß die Diagonale quasi-separiert sein soll, liefert gleichzeitig, daß die Diagonale genau dann darstellbar ist, wenn sie sogar darstellbar durch Schemata ist. Das ist nicht offensichtlich, sondern folgt aus [Knu71] Satz 6.16, der besagt, daß ein quasi-separierter algebraischer Raum, der separiert über einem Schema ist, selbst schon ein Schema ist. Das erklärt die Fußnote an der Definition von Stacks in [DM69], wenn man für algebraische Stacks die Beschreibung durch Gruppoide (Abschnitt 1.2.3) haben möchte.

Die Definitionen benutzen die glatte (oder die étale) Topologie und nicht die feinere fppf-Topologie, da Artin in [Art74] zeigt, daß jeder algebraische Stack in der fppf-Topologie auch eine glatte Überdeckung besitzt.

**Beispiel:** Vekt oder auch beliebige  $G$ -Prinzipalbündel einer glatten affinen algebraischen Gruppe  $G$  bilden einen algebraischen Stack:

1. Die Diagonale ist darstellbar, denn für zwei Bündel  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  auf  $X$  gilt:  $\text{Isom}(X, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{G\text{-lin}}(X, \mathcal{E}, \mathcal{F})$  ist ein Schema.
2. Das triviale Bündel auf  $S$  liefert einen Morphismus  $S \rightarrow BG$ , der darstellbar, glatt und surjektiv ist (sogar étale, falls  $G$  étale ist). Denn ist  $X \rightarrow BG$  ein Morphismus, der zu einem Bündel  $\mathcal{E} \rightarrow X$  gehört, so ist  $S \times_{BG} X = \mathcal{E}$ , weil:  $\{U \rightarrow S \times_{BG} X\} = \{f : U \rightarrow X, f^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{triviales Bündel}\} = \{f : U \rightarrow \mathcal{E}\}$ .

Dabei hat Punkt 2 gezeigt, daß  $S \rightarrow BG$  sogar das universelle  $G$ -Prinzipalbündel auf  $BG$  ist.

**Behauptung 1.2.11** Die Kategorien der algebraischen Stacks, Artin-Stacks und Deligne–Mumford-Stacks sind abgeschlossen unter Faserprodukten.

<sup>6</sup>Artin benutzt in [Art74] die étale Topologie. Für die Definition der Kohomologiegruppen erschiene es mir hier praktischer, gleich die glatte Topologie zu benutzen

<sup>7</sup>D. h. für jeden gerichteten, inversen Limes  $T = \lim_{\leftarrow} T_i$  von Schemata soll  $\lim_{\leftarrow} \mathcal{M}(T_i) \rightarrow \mathcal{M}(T)$  eine Äquivalenz von Kategorien sein.

**Beweis:** Für den Fall der algebraischen Stacks:

Sei also folgendes Diagramm gegeben:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2 \\
 \downarrow & & \downarrow G \\
 \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{F} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

Dann gibt es wieder eine Überdeckung:

Seien  $X_i \rightarrow \mathcal{M}_i$  Überdeckungen, dann ist  $X_1 \times_{\mathcal{S}} X_2 \rightarrow \mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{M}_2$  eine Überdeckung.

Das ist nach Voraussetzung ein algebraischer Raum oder ein Schema, ein algebraischer Raum hat dann aber seinerseits eine (étale) Überdeckung durch ein Schema. Damit hat man eine Überdeckung für das Faserprodukt.

Die Diagonale ist darstellbar:  $X \times_{\mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{M}_2} Y = (X \times_{\mathcal{M}_1} Y) \times_{X \times_{\mathcal{S}} Y} (X \times_{\mathcal{M}_2} Y)$  und die rechte Seite ist offenbar ein Schema. Fertig.

Jetzt könnte man auch weitere Eigenschaften von beliebigen Morphismen algebraischer Stacks definieren, erst einmal möchte ich eine andere Beschreibung von Stacks geben, die dann auch noch einmal viele Beispiele algebraischer Stacks liefert.

### 1.2.3 Eine andere Beschreibung: Algebraische Stacks als Gruppoide

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß man algebraische Stacks auch als Quotient von algebraischen Gruppoiden (Definition s. u.) beschreiben kann. Insbesondere liefert also jede Gruppenoperation ein Beispiel für einen Stack. Diese geometrische Beschreibung algebraischer Stacks benutze ich nur deshalb nicht zur Definition, da sie den Nachteil hat, daß sich kategorielle Konstruktionen wie Faserprodukte nicht so leicht in Termen von Gruppoiden durchführen lassen.

Eine Überdeckung  $X \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$  eines algebraischen Stacks liefert, da die Diagonale von  $\mathcal{M}$  darstellbar ist, ein simpliziales Schema (das sogar ein Gruppoid ist):

$$\cdots \rightrightarrows X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} X \rightrightarrows X \times_{\mathcal{M}} X \xrightarrow[p_2]{p_1} X$$

Das kann man wie folgt interpretieren:

- $X(U) = \{U \rightarrow X\}$  ist die Menge der Objekte von  $\mathcal{M}(U)$  zusammen mit der durch  $X$  gegebenen Erstarrung (oder Trivialisierung). Man kann nicht jeden Morphismus  $U \rightarrow \mathcal{M}$  global zu  $X \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$  liften, das heißt nicht jedes Objekt läßt eine globale

$$\begin{array}{ccc}
 & & \uparrow \\
 & \swarrow & \\
 & & U
 \end{array}$$

Erstarrung zu, lokal in der Topologie aber schon, denn es gibt die Abbildung  $X \times_{\mathcal{M}} U \rightarrow X$ .

$$\bullet X \times_{\mathcal{M}} X(U) = \left\{ \begin{array}{c} U \\ \swarrow u_1 \quad \searrow u_2 \\ X \xrightarrow{\phi} X \\ \searrow \pi \quad \swarrow \pi \\ \mathcal{M} \end{array} \right\}, \text{ die Paare von zwei Objekten mit Rigi-}$$

difizierung (die Objekte bekommt man durch die Projektionen nach  $X(U)$  wieder heraus), zusammen mit einem Morphismus in  $\mathcal{M}(U)$  (also einem Morphismus, nachdem ich die Rigidifizierung vergessen habe).

$$\bullet X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} X(U) = \left\{ \begin{array}{c} U \\ \swarrow u_1 \quad \downarrow u_2 \quad \searrow u_3 \\ X \xrightarrow{\phi_1} X \xrightarrow{\phi_2} X \\ \searrow \pi \quad \downarrow \pi \quad \swarrow \pi \\ \mathcal{M} \end{array} \right\} \text{ drei Objekte mit zwei Morphismen}$$

und der Information, wie man diese verknüpft (die Information der drei Projektionen).

- Die Diagonalen liefern jeweils die Identitäten als Morphismen der Objekte mit der Information, daß  $Id \circ \phi = \phi = \phi \circ Id$ .
- Das Assoziativgesetz für die Verknüpfung der Morphismen wird vom nächsten Schritt (dem 4-fachen Faserprodukt) geliefert, dann kommt keine neue Information hinzu.
- Die Twist-Abbildung, die die Faktoren der Faserprodukte vertauscht, liefert zu jedem  $\phi$  den inversen Morphismus  $\phi^{-1}$ .

Also hat für dieses simpliziale Schema die Menge  $X(U)$  für jedes  $U$  die Struktur eines Gruppoids. (Man hat also ein Gruppoid-Objekt in der Kategorie der Schemata.) Umgekehrt liefert jedes glatte Gruppoid einen algebraischen Stack (das zeige ich gleich nach der nächsten Definition). Erinnerung:

**Definition 1.2.12** Ein algebraisches (étales, glattes, flaches, etc.) Gruppoid besteht aus

$$R \times_{s, X, t} R \xrightarrow{\mu} R \xrightarrow{s, t} X$$

wobei  $X, R$  Schemata sind,  $s, t$  (étales, glatte, flache, etc.) Morphismen und  $\mu$  vom Faserprodukt via  $s$  und  $t$  nach  $R$  abbildet, so daß für jedes Schema  $U$  die Schnitte ein Gruppoid bilden, anders gesagt:

$$\begin{array}{ccc} R \times_X R & \xrightarrow{\mu} & R \\ p_1 \downarrow & & \downarrow t \\ R & \xrightarrow{t} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R \times_X R & \xrightarrow{\mu} & R \\ p_2 \downarrow & & \downarrow s \\ R & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

sind kartesisch.

Und es gilt ein Assoziativgesetz:

$$\begin{array}{ccc}
 R \times R \times R & \xrightarrow{(\mu, id_R)} & R \times R \\
 \downarrow (id_R, \mu) & & \downarrow \mu \\
 R \times R & \xrightarrow{\mu} & R
 \end{array}$$

$\begin{matrix} s, X, t & s, X, t & s, X, t \\ s, X, t & s, X, t & s, X, t \end{matrix}$

Aus der Forderung, daß dies für jedes  $U$  ein Gruppoid bildet, ergibt sich die Existenz eines Eins-Schnittes  $e : X \rightarrow R$  und einer Inversion mit den gewünschten Eigenschaften.

**Bemerkung:**

- Das erste hübsche Gruppoid, das mir über den Weg gelaufen ist, ist das Fundamentalgruppoid eines topologischen Raumes.
- In der Definition steht  $s$  für Quelle,  $t$  für Ziel und  $\mu$  für Multiplikation. Die Forderung, daß das erste Diagramm kartesisch ist, liest sich damit zum Beispiel: „Sind  $f$  und  $g$  zwei Morphismen mit dem gleichen Ziel, so gibt es genau einen Morphismus  $h$ , so daß  $f \circ h = g$  ist“.
- Hier ist das typische Beispiel ein Schema  $X$  mit einer Gruppenoperation  $G \times X \xrightarrow{\rho} X$ . Das zugehörige Gruppoid ist dann:

$$G \times G \times X \xrightarrow{(\mu, Id_X)} G \times X \xrightarrow[\rho]{p_2} X$$

**Konstruktion (Vorbemerkung):** Jedes Gruppoid liefert einen algebraischen Stack, indem man das Gruppoid als Gruppoid über Schemata/ $S$  „stackifiziert“, was ganz ähnlich wie das Garbfizieren funktioniert (siehe unten). Dabei findet man auch die Konstruktion des  $BG$  der Topologie wieder:

Betrachtet man das Beispiel der  $G$ -Prinzipalbündel mit der Überdeckung durch das universelle Bündel  $S \rightarrow BG$ , so zeigt die Interpretation des Gruppoids zu Beginn des Abschnitts, wie man den Stack zurückerhält, denn:  $S \times_{BG} S = Aut(\text{triviales Bündel}, S) = G$  und  $s = t =$  der Strukturmorphismus  $G \rightarrow S$ . Somit erhält man das Gruppoid:

$$G \times G \xrightarrow{\mu} G \rightrightarrows S.$$

Dann ist für ein Schema  $U$  die Kategorie

$$\begin{aligned}
 BG(U) &= \lim_{U_i \xrightarrow{cov} U} (\text{Abstiegsdaten des trivialen Bündels auf } U_i) \\
 &= \lim_{U_i \xrightarrow{cov} U} (\text{Abstiegsdaten für den Morphismus in } \text{Hom}(U_i, S)).
 \end{aligned}$$

Topologisch würde man das vielleicht so formulieren: Die Objekte sind Abbildungen vom Nerv einer Überdeckung  $U_i \rightarrow U$  in das Gruppoid:

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times G & \longrightarrow & G & \rightrightarrows & S \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 U_{ijk} & \longrightarrow & U_{ij} = U_i \times_U U_j & \rightrightarrows & U_i \longrightarrow U,
 \end{array}$$

die auf  $U_i$  eben das triviale Bündel liefern, und der Morphismus von  $U_{ij}$  nach  $G$  die Verklebemorphismen angibt.

Für das allgemeinere Beispiel der Gruppenoperation wird die Konstruktion einen Quotienten  $[X/G]$  liefern, der sich die Stabilisatoren „merkt“, nämlich statt eines Punktes für jeden Orbit einen  $B(\text{Stabilisator})$ -Punkt hat. Das Lemma 1.3.3 wird zeigen, daß, falls die Gruppen Operation frei ist und der Quotient in  $Sch/S$  existiert,  $[X/G]$  dieser Quotient ist.

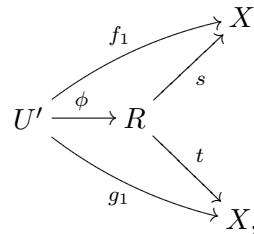
**Konstruktion (allgemein):** Sei also  $R \times_X R \xrightarrow{\mu} R \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} X$  ein algebraisches, glattes Gruppoid mit  $X$  (und  $R$ ) lokal noethersch. Dem ordne ich folgenden Stack  $[X/R]$  zu:

$[X/R](U) := \varprojlim [X/R](U' \xrightarrow{cov} U)$ . Dabei wird der Limes über alle Überdeckungen  $U' \xrightarrow{cov} U$  von  $U$  gebildet<sup>8</sup>, und es ist  $[X/R](U' \xrightarrow{cov} U)$  die Kategorie, deren Objekte kommutative Diagramme der Form:

$$\left( \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & U' \times_U U' & \begin{matrix} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{matrix} & U' & \xrightarrow{cov} & U \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \\ \cdots & \longrightarrow & R & \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{matrix} & X & & \end{array} \right)$$

sind. Das heißt die Objekte sind durch lokal trivialisierte Objekte  $U' \rightarrow X$  mit einer Verklebung  $U' \times_U U' \rightarrow R$ , welche die Kozykelbedingung erfüllt, gegeben.

Die Morphismen  $(f_i) \rightarrow (g_i)$  sind Isomorphismen  $\phi$  der Objekte:



so daß beide Dreiecke kommutieren und  $\phi$  mit den Verklebungen verträglich ist, das heißt:  $\mu(\phi \circ p_1, f_2) = \mu(g_2, \phi \circ p_2)$ .

**Behauptung 1.2.13** Diese Konstruktion liefert für jedes algebraische, lokal noethersche, glatte Gruppoid einen algebraischen Stack  $[X/R]$  mit einem surjektiven, glatten Morphismus  $X \rightarrow [X/R]$ . Ferner sind dann  $X \times_{[X/R]} X \cong R$  kanonisch isomorph.

**Beweis**

1. Das ist ein Stack (dabei benötige ich nur, daß die Strukturabbildungen  $\mu, s, t$  des Gruppoids treuflach sind):

---

<sup>8</sup>Um mir Indexverwirrung zu ersparen, setze ich hier  $U' := \coprod_{i \in I} U_i$ , zur Vorstellung hilft mir manchmal, statt  $U' \times_U U'$  lieber  $U_{ij}$  zu lesen.

- (a) Es gibt „Pullbacks“  $f^*$  zu  $V \xrightarrow{f} U$ , indem einem Objekt von  $[X/R](U' \rightarrow U)$  wie oben das folgende Objekt von  $[X/R](U' \times_U V \rightarrow V)$  zugeordnet wird:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & V \times_U U' \times_U U' & \rightrightarrows & V \times_U U' & \longrightarrow & V \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & U' \times_U U' & \rightrightarrows & U' & \longrightarrow & U \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & R & \rightrightarrows & X & & .
 \end{array}$$

(Bemerke:  $V \times_U U'$  ist eine Überdeckung von  $V$ , und es gilt  $(V \times_U U') \times_V (V \times_U U') = V \times_U (U' \times_U U')$ .) Das ist funktoriell, da  $V \times_U (-)$  ein Funktor ist und Faserprodukte assoziativ sind.

- (b) Es gibt natürliche Isomorphismen von  $g^* f^* \rightarrow (fg)^*$ , die von den natürlichen Isomorphismen  $W \times_V V \times_U U' = W \times_U U'$  induziert werden.
- (c) Für zwei Objekte  $u_1, u_2$  über  $U$  ist  $Hom_{-}(f^* u_1, f^* u_2)$  eine Garbe:

**Lemma 1.2.14** Sind  $U' \xrightarrow[f']{g'} X$  zwei Objekte in  $[X/R](U' \rightarrow U)$  und  $U'' \rightarrow U'$  eine Verfeinerung von  $U'$ ,  $\phi''$  ein Morphismus der Einschränkungen  $f'', g''$  von  $f', g'$  auf  $U''$ , dann ist auch  $\phi''$  die Einschränkung eines  $\phi'$  von  $f'$  nach  $g'$ .

**Bemerkung:** Das heißt jeder Morphismus, den ich auf einer Verfeinerung von zwei Überdeckungen bekomme, ist schon auf der größten gemeinsamen Verfeinerung der Überdeckungen definiert.

**Beweis:** (Am besten malt man sich anschaulich die Überdeckung und ihre Verfeinerung hin. Dann ist klar, daß die Verklebefunktionen auf den Schnitten der Verfeinerung, innerhalb einer überdeckenden Menge 1 sind, da die Einschränkung so definiert ist. Das  $\phi''$  muß dann mit diesen verträglich sein, also verklebt es und liefert  $\phi'$ )

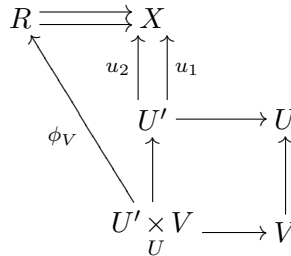
- i. Die Abbildung  $U'' \times_{U'} U'' \rightarrow U'' \times_U U'' \xrightarrow{f} R$  faktorisiert durch  $U' \times_U U' \xleftarrow{\cong} U'$ , damit kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 U'' \times_{U'} U'' & \rightrightarrows & U'' \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \pi \\
 U' \times_U U' & \xleftarrow{\Delta} & U' \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 \\
 R & \xleftarrow{e} & X
 \end{array}$$

- ii. Es gilt aber auf  $U'' \times_{U'} U''$ :  $\mu(\phi'' \circ p_1, f_2 = e) = \mu(g_2 = e, \phi'' \circ p_2)$  also  $\phi'' \circ p_1 = \phi'' \circ p_2$ . Damit verklebt die Abbildung  $\phi''$  zu dem gesuchten  $\phi'$ .

(Lemma) Fertig.

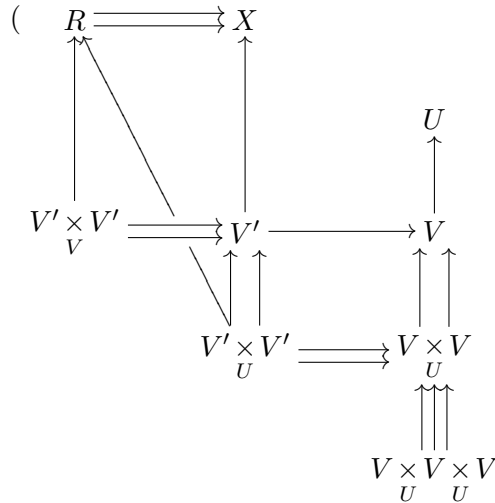
Sei also  $V$  eine Überdeckung von  $U$ , und seien  $u_1, u_2 \in [X/R](U' \rightarrow U)$  zwei Objekte. Auf  $V$  sei ein Morphismus  $\phi_V$  der Einschränkungen von  $u_1$  und  $u_2$  auf  $V$  gegeben, der die Verträglichkeitsbedingung auf  $V \times_U V$  erfüllt. Das Lemma sagt dann, daß  $\phi_V$ , das zunächst nur im Limes über die Überdeckungen von  $V$  gegeben ist, bereits auf der Überdeckung definiert ist, auf der  $u_1|_V$  und  $u_2|_V$  definiert sind, nämlich auf  $U' \times_U V$ .



Die Verträglichkeitsbedingung auf  $V \times_U V$  ist ein Abstiegsdatum für  $\phi_V$ , liefert also  $\phi_U : U' \rightarrow R$ .

(Garbe) Fertig.

- (d) Objekte verkleben: Seien also  $U$ , eine Überdeckung  $V \rightarrow U$ , Objekte  $v$  auf  $V$  (also Morphismen von  $V' \times_V V$  in das Gruppoid) und für diese ein Verklebe-Datum gegeben. Ein Verklebe-Datum ist ein Isomorphismus der beiden Pullbacks von  $v$  auf  $V \times_V V$ . Der Isomorphismus ist nach dem Lemma aber auf jeder gemeinsamen Verfeinerung der Überdeckungen  $V' \times_U V$  und  $V \times_U V'$ , also zum Beispiel auf  $V' \times_U V'$ , definiert. Dieser Morphismus  $V' \times_U V' \rightarrow R$  liefert mir das gesuchte Objekt in  $[X/R](V' \rightarrow V \rightarrow U)$  und damit in  $[X/R](U)$ .



(Wie beim Verkleben der Morphismen macht man sich die Kompatibilitäten am besten mit einem Bildchen klar.)

2. Die Diagonale  $[X/R] \rightarrow [X/R] \times [X/R]$  ist darstellbar:

(a) Die triviale Abbildung  $X \rightrightarrows X \longrightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} X & \rightrightarrows & X & \longrightarrow & X \\ e \downarrow & & \downarrow id & & \\ R & \rightrightarrows & S & & \end{array}$$

liefert eine Abbildung  $X \rightarrow [X/R]$  und  $X \times_{[X/R]} X \cong R$  kanonisch, denn:

$$X \times_{[X/R]} X(U) = \{ (U \begin{array}{ccc} U & \rightrightarrows & U \\ \downarrow & \nearrow f & \downarrow g \\ X & \rightrightarrows & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ R & \rightrightarrows & X \end{array} ) \} = \{ (U \rightarrow R) \} = R(U)$$

Dabei habe ich wieder das Lemma verwendet, um den Morphismus zwischen  $f$  und  $g$  schon auf der trivialen Überdeckung zu bekommen.

(b) Seien  $Y, Z$  Schemata mit Morphismen nach  $[X/R]$ , dann ist der Stack  $Y \times_{[X/R]} Z$

eine Garbe, denn:  $X \times_{[X/R]} Y(U) = \left\{ U \begin{array}{ccc} Y & & \\ \nearrow & \searrow y & \\ \downarrow & & [X/R] \\ \searrow & \nearrow z & \\ Z & & \end{array} \right\}$  ist eine Menge, das Ganze

also eine Garbe.

(c) Faktorisiert  $Y \rightarrow X \rightarrow [X/R]$ , so ist  $Y \times_{[X/R]} X = Y \times_X X$  ein Schema.

(d) Sei  $Y \rightarrow [X/R]$  beliebig, so gibt es (per Definition) ein  $U \xrightarrow{cov} Y$ . Also ha-

be ich ein kartesisches Diagramm (von Stacks, die alle Garben sind, also von Garben)

$$\begin{array}{ccccc} U \times_X R & \xrightarrow{\cong} & U \times_{[X/R]} X & \longrightarrow & Y \times_{[X/R]} X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U \times_X (X \times X) & \xrightarrow{\cong} & U \times_X X & \longrightarrow & Y \times_X X \end{array}$$

Erfüllte also die Abbildung  $R \xrightarrow{(s,t)} X \times X$  effektiven Abstieg, so wäre auch  $Y \times_{[X/R]} X$  ein Schema (und die Projektionen sind mit dem gleichem Argument Morphismen von Schemata).

Immer gilt aber, daß die Abbildung  $U \times_{[X/R]} X \rightarrow Y \times_{[X/R]} X$  eine darstellbare Überdeckung ist, denn sie wurde durch Basiswechsel aus einer Überdeckung konstruiert. Nach Teil (a) folgt damit, daß die Garbe  $Y \times_{[X/R]} X$  der Quotient einer glatten Äquivalenzrelation ist.

Die Diagonale einer Äquivalenzrelation ist aber immer eine Einbettung, erfüllt also effektiven Abstieg. Damit liefert das Argument oben, daß die Diagonale von  $Y \times_{[X/R]} X$  darstellbar ist. Damit ist gezeigt, daß  $Y \times_{[X/R]} X$  ein algebraischer Stack ist, dessen Diagonale eine Einbettung ist. Damit sagt 1.2.15, daß dies sogar ein algebraischer Raum ist.

- (e) Das gleiche Argument mit dem rechten Faktor im Faserprodukt liefert die Behauptung auch für beliebige Faserprodukte  $Y \times_{[X/R]} Z$ .
- (f) Gerade habe ich auch schon gesehen, daß die Abbildung:  $X \times_{[Y/R]} Y \rightarrow Y$  eine Überdeckung ist, weil sie nach Basiswechsel mit einer Überdeckung  $U \rightarrow Y$  eine ist (glatt/étale sind lokal im Bild). Damit ist also auch  $X \rightarrow [X/R]$  eine Überdeckung.

(Behauptung) Fertig.

**Bemerkung:** Diese Konstruktion liefert, wenn sie auf eine Präsentation  $X \rightarrow \mathcal{M}$  eines Stacks angewendet wird, den ursprünglichen Stack zurück:

1. Jedes Objekt  $u : U \rightarrow \mathcal{M}$  liefert ein Objekt:

$$\begin{array}{ccccc}
 (X \times_{\mathcal{M}} U) \times_{\mathcal{M}} (X \times_{\mathcal{M}} U) & \rightrightarrows & X \times_{\mathcal{M}} U & \xrightarrow{cov} & U \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X \times_{\mathcal{M}} X & \rightrightarrows & X & \longrightarrow & \mathcal{M}
 \end{array}$$

Und die Morphismen  $U \begin{array}{c} \longrightarrow V \\ \searrow \swarrow \\ \mathcal{M} \end{array}$  induzieren Funktoren der Gruppoide. (Die 2-Morphismen genauso)

2. Umgekehrt liefert jedes Objekt

$$\begin{array}{ccccc}
 (U' \times_U U' \times_U U') & \rightrightarrows & U' \times_U U' & \rightrightarrows & U' \xrightarrow{cov} U \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cdots \\
 X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} X & \rightrightarrows & X \times_{\mathcal{M}} X & \rightrightarrows & X \longrightarrow \mathcal{M}
 \end{array}$$

eine Überdeckung  $U'$  von  $U$  zusammen mit Objekten  $U' \rightarrow \mathcal{M}$  und Abstiegsdatum, also ein Objekt über  $U$ . Da für jeden Stack die Homomorphismen Garben sind, gilt das auch für Morphismen.

3. Das liefert eine Äquivalenz der Faserkategorien  $\mathcal{M}(U)$ : Für die Überdeckung  $U' = X \times_{\mathcal{M}} U$  von  $U$  löst  $U \rightarrow \mathcal{M}$  das Abstiegsproblem. Ist umgekehrt  $U \rightarrow \mathcal{M}$  das induzierte Objekt einer Überdeckung  $U'$ , so hat erhält man aus der Eigenschaft des Faserproduktes  $X \times_{\mathcal{M}} U$  einen Morphismus in  $[X/R](U)$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (U' \times_U U' \times_U U') & \rightrightarrows & U' \times_U U' & \rightrightarrows & U' & \xrightarrow{cov} & U \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} U & \rightrightarrows & X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} U & \rightrightarrows & X \times_{\mathcal{M}} U & \xrightarrow{cov} & U \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} X & \rightrightarrows & X \times_{\mathcal{M}} X & \rightrightarrows & X & \longrightarrow & \mathcal{M}
 \end{array}$$

(Bemerkung) Fertig.

**Bemerkung:** Zwei Überdeckungen  $X \rightarrow \mathcal{M}$  und  $X' \rightarrow \mathcal{M}$  definieren demnach zwei Gruppoide, die den gleichen Stack liefern. Die Äquivalenz der Quotienten kann man direkt in Termen der Gruppoide beschreiben:

Hat man eine glatte Überdeckung  $Y \rightarrow X$  gegeben, so definiert man den Pullback des Gruppoids  $R \times_X R \xrightarrow{\mu} R \xrightarrow[t]{s} X$  auf  $Y$  durch  $R_Y := (Y \times Y) \times_{X \times X} R$ . Dieses Gruppoid  $(R_Y, Y)$  hat dann eine Abbildung in das Gruppoid  $(R, X)$ . Und beide Gruppoide definieren den gleichen Stack, da gilt:

$$Y \times_{\mathcal{M}} Y \cong Y \times_X (X \times_X X) \times_{\mathcal{M}} Y \cong (Y \times Y) \times_{X \times X} X \times_X X.$$

Hat man zwei Überdeckungen von  $\mathcal{M}$  wie oben, so definiert also deren Faserprodukt  $X \times X' \rightarrow \mathcal{M}$  ein Gruppoid, das die Gruppoide von  $X$  und  $X'$  überlagert. Zwei Gruppoide definieren also genau dann isomorphe Stacks, wenn es ein drittes Gruppoid gibt, das beide überlagert ([FC90]).

**Bemerkung:** Für den Quotienten einer Gruppenoperation  $[X/G]$  kann man die Kategorien  $[X/G](U)$  auch beschreiben als:

$$[X/G](U) = \left\langle (E \rightarrow U, f) \left| \begin{array}{l} E \rightarrow U \text{ ein } G\text{-Prinzipalbündel auf } U \\ E \xrightarrow{f} X \text{ eine } G\text{-lineare Abbildung} \end{array} \right. \right\rangle$$

Es fehlt noch der Beweis von:

**Satz 1.2.15** *Ist  $\mathcal{M}$  ein lokal noetherscher algebraischer Stack, so gilt:*

1. *Ist  $\Delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  unverzweigt, so gibt es eine étale Überdeckung von  $\mathcal{M}$  durch ein Schema.*
2. *Ist  $\Delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  eine (abgeschlossene) Einbettung, so ist  $\mathcal{M}$  ein (separierter) algebraischer Raum.*

Die Umkehrung sieht man leicht:

**Lemma 1.2.16** *Sei  $\mathcal{M}$  ein Deligne-Mumford-Stack, dann ist die Diagonalabbildung  $\mathcal{M} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  unverzweigt.*

**Beweis:** „unverzweigt“ ist lokal im Bild bezüglich der étalen-Topologie. Nimm also eine étale Überdeckung  $X \rightarrow \mathcal{M}$  von  $\mathcal{M}$  und betrachte das kartesische Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times_X X & \xrightarrow{(s,t)} & X \times X \\ \downarrow \text{étale} & & \downarrow \text{étale} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{M} \times \mathcal{M} \end{array}$$

Der obere Pfeil ist unverzweigt. (Denn  $s$  und  $t$  sind unverzweigt, damit auch  $s \times t$ . Die Diagonale eines Schemas ist aber immer unverzweigt (sogar eine Immersion), also ist auch  $(s \times t) \circ \Delta$  unverzweigt.) Fertig.

(Bemerkung:  $\Delta$  ist in der Regel natürlich nicht étale, denn  $(s, t)$  wird selten offen sein)

**Beweis des Satzes:** Es ist in beiden Fällen nur eine étale Überdeckung von  $\mathcal{M}$  zu konstruieren. Da die Diagonale auch in 2. unverzweigt ist, genügt es also auch, nur 1. zu zeigen.

Sei  $\pi : X \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{M}$  eine Überdeckung von  $\mathcal{M}$ . Dann ist  $R := X \times_{\mathcal{M}} X \xrightarrow{\delta=(s,t)} X \times X$  unverzweigt, und die Projektionen  $R = X \times_{\mathcal{M}} X \rightarrow X$  sind beide glatt.

Die Strategie ist jetzt die gleiche wie in [DG70]<sup>9</sup>: Ich suche zu jedem  $x \in X$  ein Unterschema  $x \in Y \subset X$ , so daß die Projektion  $X \times_{\mathcal{M}} Y \rightarrow X$  étale ist. Dann ist auch die Einschränkung  $\pi|_Y : Y \rightarrow \mathcal{M}$  étale, und die Vereinigung der  $Y$  liefert eine étale Überdeckung von  $\mathcal{M}$ .

Sei nun ein  $x \in X$  fest gewählt und  $(x, x) \in R$  der Punkt der Identität  $x \Rightarrow x$ . Da  $s$  und  $t$  glatt sind, faktorisieren beide in einer Umgebung  $x \in U \subset X$  als  $R \xrightarrow{\tilde{s}} \mathbb{A}_U^n \xrightarrow{p} U$  (beziehungsweise  $\tilde{t} : R \rightarrow \mathbb{A}_U^n$ ) mit étalen Morphismen  $\tilde{s}, \tilde{t}$ . Dabei kann ich auch noch annehmen, daß  $\tilde{s}(x, x) = (x, 0)$ , der Nullpunkt über  $x$ , ist. Nun besitzen  $s$  und  $t$  auch einen Schnitt, weshalb die Restklassenkörper  $k(x)$  und  $k((x, x))$  isomorph sind. Also sind sogar die Kompletzierungen der lokalen Ringe  $\hat{\mathcal{O}}_{R,(x,x)}$  und  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}_U^n, \tilde{s}(x,x)} = \mathcal{O}_{X,x}[x_1, \dots, x_n]_{\tilde{s}(x,x)}$  isomorph.

Betrachte die Abbildung  $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{t^\#} \hat{\mathcal{O}}_{R,(x,x)} \cong \mathcal{O}_{X,x}[x_1, \dots, x_n]_{\tilde{s}(x,x)}$ . Weil  $\delta : R \rightarrow X \times X$  unverzweigt ist, gilt auch, daß  $\delta^\# : \hat{\mathcal{O}}_{X \times X, (x,x)} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{R,(x,x)}$  surjektiv ist. Also erzeugen die Bilder von  $t^\#$  und  $s^\#$  den Ring  $\hat{\mathcal{O}}_{R,(x,x)}$  topologisch. Genauso wird das maximale Ideal  $\mathfrak{m}_{R,(x,x)} \subset \hat{\mathcal{O}}_{R,(x,x)}$  von den Bildern  $(s^\#(\mathfrak{m}_x), t^\#(\mathfrak{m}_x))$  erzeugt (denn das gilt für das maximale Ideal von  $\mathcal{O}_{X \times X, (x,x)}$ ).

Deshalb gibt es (wenn man  $x_i$  um eine Einheit aus  $s^\#(\mathcal{O}_{X,x})$  und einen additiven Term aus  $s^\#(\mathfrak{m}_x)$  abändert),  $f_i \in \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ , so daß  $t^\#(f_i) \equiv x_i \pmod{\mathfrak{m}_{(x,x)}^2}$  ist, d. h.  $t^\#(f_i)$  sind lokale Parameter in  $\mathcal{O}_{R,(x,x)}$  als  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Algebra via  $s^\#$ . Nach Verkleinern von  $U$  seien  $U = \text{Spec}(A)$  und  $f_i \in A$ .

Setze  $Y_1 := \text{Spec}(A/(f_i))$ . Die Inklusion  $X \times_{\mathcal{M}} Y_1 \rightarrow R$  ist dann für geeignete  $s_i \in \mathfrak{m}_x$  im komplettierten lokalen Ring durch  $\mathcal{O}_{X,x}[x_1, \dots, x_n]_{\tilde{s}(x,x)} \xrightarrow{x_i \mapsto s_i} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$  gegeben. Insbesondere ist also die Einschränkung von  $s$  auf  $X \times_{\mathcal{M}} Y_1$  infinitesimal bei  $(x, x)$  die Identität, also ist  $s|_{X \times_{\mathcal{M}} Y_1}$  étale in  $(x, x)$ , damit auch in einer Umgebung  $V$  von  $(x, x)$ .

Bleibt zu zeigen, daß das Schema  $V$  der Punkte, in denen  $s|_{X \times_{\mathcal{M}} Y_1}$  étale ist, von der Form  $t^{-1}(Y)$  ist, d. h.  $V$  steigt ab zu  $Y \subset Y_1$  offen und  $x \in Y$ . Dazu prüft man, daß die Urbilder von  $V$  in  $R \times_{\mathcal{M}} Y = X \times_{\mathcal{M}} X \times_{\mathcal{M}} Y_1$  via der beiden Projektionen  $p_{13}, p_{23}$  übereinstimmen. Beide sind nach [Gro67] (Proposition 17.7.4) das Unterschema, auf dem  $p_{12}$  étale ist.

Fertig.

---

<sup>9</sup>In Exposé V von [DG70] wird aus einem flachen Gruppoid mit quasi-endlicher Diagonale ein quasi-endliches, flaches Gruppoid konstruiert.

### 1.2.4 Vergleich mit der üblichen Definition

Eine (Prä-)Garbe ist ein Funktor  $\mathcal{G}$  von  $Sch_S^{opp} \rightarrow Ens$ . Das kann man auch umdrehen: Betrachte die Kategorie  $\mathcal{G}^{Fib}$  mit Objekten Paare  $(U \in Sch_S, u \in \mathcal{G}(U))$  und Morphismen  $\text{Hom}((U, u), (V, v)) = \{f : U \rightarrow V \mid f^*(v) = u\}$ .

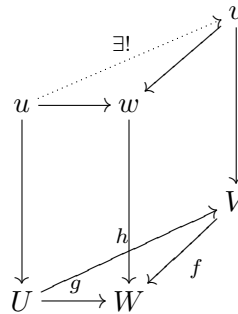
Das liefert eine in Mengen gefaserte Kategorie  $\mathcal{G}^{Fib} \rightarrow Sch_S$ :

**Definition 1.2.17** Eine in Gruppoiden gefaserte Kategorie ist eine Kategorie  $\mathcal{G}$  über  $Sch_S$  ( $P : \mathcal{G} \rightarrow Sch_S$ ) mit:

1. Zu jedem Diagramm  $\left( \begin{array}{ccc} & v & \text{in } \mathcal{G} \\ & \downarrow P & \\ U & \xrightarrow{f} V & \text{in } Sch_S \end{array} \right)$  existiert ein  $(f^*v) = u \xrightarrow{\phi} v$ ,

so daß  $\left( \begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\phi} & v & \text{in } \mathcal{G} \\ \vdots & P & \downarrow P & \\ U & \xrightarrow{f=P(\phi)} & V & \text{in } Sch_S \end{array} \right)$  kommutiert.

2. Man kann Diagramme eindeutig vervollständigen:



Die Konstruktion, die ich oben für eine Garbe hingeschrieben habe, kann man genauso für eine Prägarbe von Gruppoiden durchführen, und man erhält eine in Gruppoiden gefaserte Kategorie. Dabei sind die Morphismen zwischen den verschiedenen Fasern hier durch  $\text{Hom}((U, u), (V, v)) = \{f : U \rightarrow V, \phi : u \rightarrow f^*v\}$  definiert.

Umgekehrt bekommt man aus einer in Gruppoiden gefaserten Kategorie eine Prägarbe, indem man die Faser über einem Schema betrachtet:  $U \mapsto \mathcal{G}_U$  mit Objekten  $\{u \in \mathcal{G} \mid P(u) = U\}$  und Morphismen  $\{u \rightarrow v \mid P(u \rightarrow v) = Id_U\}$ . Damit stellt sich die Frage, wie man einen *Funktor*  $f^*$  wählt. Axiom 2. garantiert für jede gefaserte Kategorie, daß der Pullback aus 1. bis auf kanonische Isomorphie bestimmt ist (indem man  $U = V$  und  $h = Id_U$  einsetzt). Deshalb wird bei dieser Definition von Stack oft ein solches  $f^*$  gewählt. Wenn man das kann (für algebraische Stacks geht das), ist es nicht mehr schwer, die Axiome für eine Prägarbe von Kategorien nachzurechnen, die fehlenden Axiome werden ebenfalls in dem knappen Axiom (2) kodiert.

Das sind zu einander inverse Konstruktionen.

## 1.3 Weitere Eigenschaften algebraischer Stacks

### 1.3.1 Grobe Modulräume

**Definition 1.3.1** Ein algebraischer Raum  $M$  zusammen mit einer Abbildung  $\mathcal{M} \rightarrow M$  heißt grober Modulraum für  $\mathcal{M}$ , wenn gilt:

Alle Abbildungen  $\mathcal{M} \rightarrow N$  in einen algebraischen Raum  $N$  faktorisieren eindeutig durch  $M$ .

Für Deligne-Mumford-Stacks gilt der folgende Satz, den ich ohne Beweis zitiere, da ich die Aussage im folgenden auch nicht benutze:

**Behauptung 1.3.2** [FC90] Sei  $\mathcal{M}$  ein noetherscher Deligne-Mumford-Stack, dessen Diagonale  $\Delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$  endlich ist. Dann existiert ein grober Modulraum  $\mathcal{M} \rightarrow M$  für  $\mathcal{M}$ .

Für jede étale Überdeckung  $X \rightarrow \mathcal{M}$  und jeden algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  gilt dann  $M(k) = (X(k)/X \times_{\mathcal{M}} X(k))$ .

**Lemma 1.3.3** Ist  $R \times_X R \xrightarrow{\mu} R \xrightarrow[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}} X$  ein Gruppoid mit glatten Strukturabbildungen  $s, t$ , dann gilt:

1. Der Quotient  $(X/R)$  in der Kategorie der Garben auf  $(Sch/S, \mathcal{T}_{glatt})$  ist genau dann der Stack-Quotient  $[X/R]$ , wenn die Diagonale  $R \rightarrow X \times X$  ein Monomorphismus ist.
2. Ist der Quotient in der Kategorie der Garben ein algebraischer Raum, so ist dieser der grobe Modulraum für  $[X/R]$ .

**Beweis:**

1. Für Garben  $\mathcal{F}$  ist die Diagonale immer ein Monomorphismus ( $\mathcal{F} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{F} \times \mathcal{F}$  ist injektiv, denn für das (Faser-)Produkt von Garben muß man nichts garbifizieren). Ist die Diagonale aber ein Monomorphismus, so ist der Stack eine Garbe: Sei ein Automorphismen eines Objektes  $U \rightarrow [X/R]$  gegeben, dann kann ich diesen auf eine Überdeckung  $U'$  einschränken, so daß die Verkettung  $U' \rightarrow U \rightarrow [X/R]$  durch  $X$  faktorisiert. Ein 2-Morphismus auf  $U'$  ist aber nun dasselbe wie ein Element in  $X \times_{[X/R]} X(U')$ . Diese Menge liegt nach Voraussetzung injektiv in  $X \times X(U')$ , ist also durch die Bild- und Ziel-Morphismen, die beide  $U' \rightarrow X$  sein sollen, bestimmt. Also gibt es nur einen 2-Morphismus auf  $U'$ . Die 2-Morphismen von  $U \rightarrow [X/R]$  bilden aber eine Garbe, also gibt es auch nur einen 2-Morphismus auf  $U$ .

2. Jede Abbildung von  $[X/R]$  in eine Garbe muß die 2-Morphismen auf Identitäten abbilden. Es gilt aber:

$$([X/R](\cdot)/(2\text{-Morphismen}))^+ = (X(\cdot)/R(\cdot))^+,$$

wobei  $+$  die „halbe“ Garbifizierung ist.

Die Schnitte der linken Seite über einem Schema  $U$  sind gegeben durch Objekte  $u' \in X(U')$  auf einer Überdeckung  $U' \xrightarrow{\text{cov}} U$ , modulo der Äquivalenzrelation, die durch Verfeinerung und die Äquivalenzrelation  $R(U')$  gegeben ist.

Umgekehrt ist jedes Element rechts  $u \in (X/R)(U)$  auf einer Überdeckung  $U'$  durch Elemente  $X(U')$  beschrieben, modulo der gleichen Äquivalenzrelation wie oben. Fertig.

### 1.3.2 Eigenschaften von Morphismen

Für algebraische Stacks kann man noch weitere Eigenschaften von Schemata und Morphismen übertragen:

**Definition 1.3.4** Sei  $\mathbb{E}$  eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata, die stabil unter Basiswechsel und lokal (in der Topologie) in Bild und Urbild ist. Dann hat ein Morphismus  $\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ , wenn es ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\text{cov}} & \mathcal{M}' \\ \downarrow f_X & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\text{cov}} & \mathcal{M} \end{array}$$

gibt, in dem  $X, X'$  Schemata sind, die  $\mathcal{M}$  bzw.  $\mathcal{M}'$  überdecken und  $f_X$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$  hat.

Zum Beispiel ([Gro67], §2.5 und §17.7): surjektiv, lokal von endlichem Typ, lokal von endlicher Präsentation, flach, glatt.

**Definition 1.3.5** Sei  $\mathbb{E}$  eine Eigenschaft von Schemata, die lokal in der Topologie ist, dann hat ein algebraischer Stack die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ , wenn er eine Überdeckung durch ein Schema  $X \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{M}$  hat, so daß  $X$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$  besitzt.

Für die so definierten Eigenschaften gilt dann wieder:

**Lemma 1.3.6** Es gilt für alle Überdeckungen  $X \rightarrow \mathcal{M}$  und  $X' \rightarrow \mathcal{M}'$ :

1. Besitzt  $\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ , und ist

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\text{cov}} & \mathcal{M}' \\ \downarrow f_X & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\text{cov}} & \mathcal{M} \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm, so hat auch  $f_X$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ .

2. Hat  $\mathcal{M}$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ , so auch jedes überdeckende Schema  $X \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Beweis:** Ich male nur das Diagramm für 2., weil das kleiner ist:

Sei  $X$  eine Überdeckung von  $\mathcal{M}$ , die  $\mathbb{E}$  hat,  $T \rightarrow \mathcal{M}$  eine zweite Überdeckung.

$$\begin{array}{ccc} T \times_{\mathcal{M}} X & \xrightarrow{\text{cov}} & T \\ \downarrow \text{cov} & & \downarrow \text{cov} \\ X & \xrightarrow{\text{cov}} & \mathcal{M} \end{array}$$

Nun hat  $X$  die Eigenschaft  $\mathbb{E}$ , also auch das Schema  $T \times_{\mathcal{M}} X$ , also auch  $T$ .

Fertig.

**Bemerkung:** Die Eigenschaften der Morphismen sind jetzt wieder stabil unter Basiswechsel und lokal in Bild und Ziel (in der 2-Kategorie der Stacks).

### 1.3.3 Topologische Eigenschaften von Modulmultiplizitäten

**Definition 1.3.7** Ein (offener, abgeschlossener) algebraischer Unterstack  $\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$  ist ein algebraischer Stack  $\mathcal{N}$  zusammen mit einem darstellbaren Morphismus nach  $\mathcal{M}$ , der eine (offene, abgeschlossene) Einbettung ist.

Ein algebraischer Stack heißt zusammenhängend, wenn er nicht (äquivalent zur) disjunkte(n) Vereinigung zweier nicht leerer algebraischer Unterstacks ist.

Ein algebraischer Stack heißt irreduzibel, wenn er nicht Vereinigung zweier nicht leerer abgeschlossener Unterstacks ist.

**Bemerkung:** Das offene Komplement eines abgeschlossenen Unterstacks läßt sich auf einer Überdeckung definieren und ist wieder ein algebraischer Stack. Genauso kann man den komplementären (reduzierten abgeschlossenen) Unterstack zu einem offenen Unterstack definieren.

**Lemma 1.3.8** Ein lokal noetherscher Stack ist in genau einer Weise disjunkte Vereinigung zusammenhängender algebraischer Stacks. Bezeichne mit  $\pi_0(\mathcal{M})$  die Menge der Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{M}$ .

Für eine Überdeckung  $X \rightarrow \mathcal{M}$  gilt weiter:

$$\pi_0(X \times_{\mathcal{M}} X) \rightrightarrows \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{M})$$

ist exakt.

**Beweis:** Sei  $X \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{M}$  eine (lokal noethersche) Überdeckung des Stacks. Dann ist  $X = \coprod_{i \in I} X_i$  die Summe seiner Komponenten. Betrachte  $\coprod_{j \in I}$  s.d.  $X_j \times_{X_i \neq \emptyset} X_j =: X'_i$ . Dann ist  $X = \coprod_{i \in I'} X'_i$  für ein  $I' \subset I$ . Sei  $\mathcal{M}_j := [X'_j / X'_j \times_{\mathcal{M}} X'_j]$ , dann ist  $X'_j \times_{\mathcal{M}_j} X'_j = X'_j \times_{\mathcal{M}} X'_j$ , und es gilt  $(\coprod_{\mathcal{M}} X_i) \times (\coprod_{\mathcal{M}} X_i) = \coprod_{j \in I'} (X'_j \times_{\mathcal{M}} X'_j)$ . Also ist  $\mathcal{M} = \coprod_{j \in I'} \mathcal{M}_j$ .

Die  $\mathcal{M}_j$  sind zusammenhängend: Schreibe  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_i$ , und sei  $X_i \times_{\mathcal{M}} X_j \neq \emptyset$  für alle  $i, j$ . Wäre dann  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \sqcup \mathcal{M}_2$ , so würde gelten, daß  $(\coprod X_i) = (\coprod X_i \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_1) \sqcup (\coprod X_i \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_2)$ . Dann ist aber – da  $\mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_2 = \emptyset$  – einer der Summanden leer, die Summanden überdecken aber jeweils ein  $\mathcal{M}_i$ , also ist  $\mathcal{M}_1$  oder  $\mathcal{M}_2$  leer. Fertig.

### 1.3.4 Der Situs $\mathcal{M}_{glatt}$ - Kohomologie von Garben auf Stacks

**Definition 1.3.9** Sei  $\mathcal{M}$  ein algebraischer Stack. Dann ist der Situs  $\mathcal{M}_{glatt}$  definiert mit Objekten  $X \xrightarrow{glatt} \mathcal{M}$ , wobei  $X$  ein Schema ist, Morphismen  $X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} Y \\ \searrow \downarrow \swarrow \\ \mathcal{M} \end{array}$ , und die Über-

deckungen sind glatte Überdeckungen der Schemata.

**Bemerkung:** 1. Eine Garbe (abelscher Gruppen) auf einem Stack  $\mathcal{M}$  ist dasselbe wie eine Garbe  $\mathcal{F}$  auf einer Überdeckung  $X \rightarrow \mathcal{M}$  mit einem Isomorphismus  $p_1^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} p_2^* \mathcal{F}$  auf  $X \times_{\mathcal{M}} X$ , der auf dem 3-fachen Faserprodukt die Kozykelbedingung erfüllt (für den Fall des Quotienten nach einer Gruppenoperation  $G \times X \rightarrow X$  ist das dasselbe wie eine  $G$ -Linearisierung der Garbe):

Eine Garbe auf dem Stack liefert via Einschränkung sicher solch eine auf  $X_{glatt}$ . Umgekehrt liefert mir die Garbenbedingung aus einer Garbe auf  $X$  mit Isomorphismen wie oben auch eine Garbe auf  $\mathcal{M}$ , denn jedes Schema  $Y \rightarrow \mathcal{M}$  wird von  $X \times_{\mathcal{M}} Y$  überdeckt.

2. Ich kann globale Schnitte einer Garbe auf  $\mathcal{M}$  definieren: Ich nehme für eine Überdeckung  $X \rightarrow \mathcal{M}$  die Menge  $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{F}) := \text{Kern}(\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightrightarrows \Gamma(X \times_{\mathcal{M}} X))$ . (Das ist wie in 1. unabhängig von der Überdeckung).

**Definition 1.3.10** Ist  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf einem Stack  $\mathcal{M}$  (das heißt auf dem zugehörigen Situs), dann ist  $H^i(\mathcal{M}, \mathcal{F}) := R^i \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ .

Für eine Überdeckung  $X \rightarrow \mathcal{M}$  eines Stacks hat man so die gleichen Kohomologiegruppen definiert, die zum Beispiel in [Fri82] für das simpliziale Schema  $(X^{\times^i \mathcal{M}})_i$  definiert werden, nur wird dort die étale Topologie benutzt. Es gilt aber genauso in der glatten Topologie, daß es genügend injektive Garben gibt, und:

**Behauptung 1.3.11** [Fri82] Ist  $X \rightarrow \mathcal{M}$  eine Präsentation eines algebraischen Stacks,  $(X_i := \times^i X)$  das zugehörige simpliziale Schema,  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $\mathcal{M}$ , so gibt es eine konvergente Spektralsequenz:

$$E_1^{p,q} = H_{glatt}^p(X_q, \mathcal{F}|_{X_i}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{M}, \mathcal{F}).$$

**Bemerkung:** Möchte man die Theorie der Topoi benutzen, so kann man auch direkt die Kohomologie von Garben auf  $\mathcal{M}_{glatt}$  definieren. Dies wird zum Beispiel in [Beh93] durchgeführt. Die Kohomologiegruppen, die man so definiert hat sind jedoch die gleichen.

Der Situs  $\mathcal{M}_{glatt}$  ist sogar *geringt*, denn die Garben  $\mathcal{O}_X$  für  $X \rightarrow \mathcal{M}$  liefern eine Garbe  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$  von Ringen auf dem Situs, dazu benötigt man nur, daß  $\mathcal{O}_X$  eine Garbe auf  $X_{glatt}$  definiert. Damit kann man auch von Modulgarben auf einem Stack sprechen.

**Ein Beispiel** einer Modulgarbe auf einem Stack:

Ist  $\mathcal{N} \xrightarrow{i} \mathcal{M}$  eine abgeschlossene Einbettung, so definiert dies eine Idealgarbe  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ . Sind  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{M}$  beide glatt, so ist das *Konormalenbündel*  $i^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$  eine lokal freie Garbe auf  $\mathcal{N}$ , denn für eine glatte Präsentation  $M \rightarrow \mathcal{M}$  bekommt man mit  $N := \mathcal{N} \times_{\mathcal{M}} M$ :

$$\begin{array}{ccccc} M \times M & \rightrightarrows & M & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M} & & \mathcal{M} & & \mathcal{M} \\ i_2 \uparrow & & i_1 \uparrow & & i \uparrow \\ N \times N & \rightrightarrows & N & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{N} & & \mathcal{N} & & \mathcal{N} \end{array}$$

Und da  $M \times_{\mathcal{M}} N \cong N \times_{\mathcal{M}} N \cong N \times_{\mathcal{N}} N \cong N \times_{\mathcal{M}} M$ , erfüllen die Idealgarben, die durch  $i_2$  und  $i_1$  gegeben sind, die Verträglichkeitsbedingung, liefern also eine Garbe  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  auf  $\mathcal{N}$ , die lokal frei ist, weil die Garben für  $i_1, i_2$  lokal frei sind.

Man kann Vektorbündel auch wieder geometrisch realisieren:

**Bemerkung: Lokale Konstruktionen** können auch für Stacks durchgeführt werden:

Sei  $\mathcal{M}$  ein algebraischer Stack,  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel auf  $\mathcal{M}$ ,  $M \rightarrow \mathcal{M}$  eine Präsentation. Dann liefern die Schemata

$$\mathbb{V}(\mathcal{E}|_{M \times_{\mathcal{M}} M}) \rightrightarrows \mathbb{V}(\mathcal{E}|_M)$$

(bzw.  $\mathbb{P}(\mathcal{E}|_M)$ ) ein Gruppoid, dessen Quotient mit  $\mathbb{V}(\mathcal{E})$  (bzw.  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ ) bezeichnet wird. Nach Konstruktion hat man einen darstellbaren Morphismus  $\mathbb{V}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{M}$ , so daß für alle Schemata  $X \rightarrow \mathcal{M}$  das Faserprodukt  $\mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_{\mathcal{M}} X$  das Vektorbündel  $\mathbb{V}(\mathcal{E}|_X)$  auf  $X$  ist.

### 1.3.5 Differentiale

Für die Berechnung des Kohomologierings des Stacks der Vektorbündel über einer Kurve benötige ich eine Beschreibung des Normalenbündels an einen Unterstack als Quotient des Tangentialbündels. Dazu möchte ich zunächst relative Differentiale für darstellbare Morphismen definieren.<sup>10</sup>

#### Relative Differentiale für darstellbare Morphismen

**Notation:** Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Morphismus von Schemata, so bezeichne ich die relativen Differentiale zu  $f$ , wenn keine Doppeldeutigkeiten entstehen, mit  $\Omega_{X/Y}$ , sonst schreibe ich  $\Omega_{X \xrightarrow{f} Y}$ .

Ist  $X \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$  eine Überdeckung eines algebraischen Stacks und  $(R := X \times_{\mathcal{M}} X, X)$  das zugehörige Gruppoid. Dann könnte man, falls  $\mathcal{M}$  ein Schema wäre, an dem kartesischen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathcal{M}} X & \xrightarrow{s} & X \\ \downarrow t & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \end{array}$$

<sup>10</sup>G. Laumon definiert in [Lau88] den Kotangentialkomplex für Morphismen algebraischer Stacks. Seine Definition benutzt nur den durch den Stack definierten geringsten Situs, leider habe ich nicht gleich sehen können, wie ich damit herumrechnen kann.

ablesen, daß  $s^*\Omega_{X/\mathcal{M}} = \Omega_{X \times_X \overset{\mathcal{M}}{s} \rightarrow X}$ . Der rechte Term ist aber auch für einen Stack  $\mathcal{M}$  definiert. Will ich relative Differentiale  $\Omega_{X/\mathcal{M}}$  definieren, muß ich also nur zeigen, daß dieser zu einer Garbe auf  $X$  absteigt.

Ist allgemeiner  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein darstellbarer Morphismus von algebraischen Stacks und  $Y \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{N}$  eine glatte Überdeckung von  $\mathcal{N}$ , so möchte ich analog die Garbe der *relativen Differentiale*  $\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  auf  $\mathcal{M}$  als diejenige Garbe definieren, die man durch Abstieg aus der Garbe  $\Omega_{Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/Y}$  auf der Überdeckung  $Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  von  $\mathcal{M}$  erhält. (Garben auf  $\mathcal{M}$  waren definiert als Garben auf einer Überdeckung mit einem Abstiegsdatum.)

**Lemma 1.3.12** *Ist  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  darstellbar, so ist die oben beschriebene Garbe  $\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  wohldefiniert und unabhängig von der gewählten Überdeckung  $Y \rightarrow \mathcal{N}$ .*

**Beweis:** Sei  $Y \rightarrow \mathcal{N}$  eine Überdeckung, dann erhält man aus dem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} Y \times_{\mathcal{N}} Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M} & \xrightarrow[p_{23}]{} & Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \downarrow p_{12} & & \downarrow & & \downarrow \\ Y \times_{\mathcal{N}} Y & \xrightarrow[p_2]{} & Y & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array}$$

ein Abstiegsdatum für  $\Omega_{Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/Y}$ : Das linke Quadrat ist für die oberen und die unteren Pfeile kartesisch und liefert damit den kanonischen Isomorphismus der beiden Pullbacks  $p_{13}^* \Omega_{Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/Y} \cong \Omega_{p_{12}} \cong p_{23}^* \Omega_{Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/Y}$ .

Die Unabhängigkeit von der Überdeckung ist klar, weil für eine Verfeinerung  $\tilde{Y} \rightarrow Y \rightarrow \mathcal{N}$  die Garbe auf  $\tilde{Y} \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}$  der Pullback von der Garbe auf  $Y \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}$  ist. Fertig.

**Bemerkung:** Da jedes Gruppoid einen Schnitt  $e = \Delta$  hat, kann man die Differentiale an  $X \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{M}$  auch als  $\Omega_{X/\mathcal{M}} = \Delta^*(\Omega_{X \times_{\mathcal{M}} X/X})$  berechnen.

**Beispiel:** Ist  $\mathcal{M} = [*/G]$  der klassifizierende Stack einer glatten algebraischen Gruppe  $G$ , dann ist  $\Omega_{G \rightarrow *} = \mathcal{O}_G^{\dim(G)}$ . Damit sieht man, daß auch  $\Omega_{*/\mathcal{M}}$  trivial vom Rang  $\dim(G)$  ist. Insbesondere beweist das Lemma aber auch noch einmal, daß die Garbe  $\Omega_{G \rightarrow *}$  trivial ist.

**Bemerkung:** Die Eigenschaften der relativen Differentiale von Schemata übertragen sich nach Konstruktion, dabei werden die Abbildungen zwischen den Garben von denen der Pullbacks auf Überdeckungen gegeben:

- Ist  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  darstellbar,  $\mathcal{N}' \xrightarrow{f} \mathcal{N}$  ein beliebiger Morphismus, und  $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \times_{\mathcal{N}} \mathcal{N}' \xrightarrow{f' = p_1} \mathcal{M}$ , so gilt:

$$f'^*(\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}) \xrightarrow{\cong} \Omega_{\mathcal{M}'/\mathcal{N}'}$$

- Für darstellbare Morphismen  $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{N} \leftarrow \mathcal{M}_2$  gilt:

$$p_1^*(\Omega_{\mathcal{M}_1/\mathcal{N}}) \oplus p_2^*(\Omega_{\mathcal{M}_2/\mathcal{N}}) \xrightarrow{\cong} \Omega_{\mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}_2/\mathcal{N}}$$

- Sind  $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N} \xrightarrow{g} \mathcal{K}$  darstellbare Morphismen, so ist die Sequenz:

$$f^*(\Omega_{\mathcal{N}/\mathcal{K}}) \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{K}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \rightarrow 0$$

exakt. Ist  $f$  außerdem glatt, so ist die Sequenz auch links exakt.

- Ist  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  darstellbar und  $\iota : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$  eine Einbettung, so hat man eine exakte Sequenz:

$$N_{\mathcal{K}/\mathcal{M}} \rightarrow i^*\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{K}/\mathcal{N}} \rightarrow 0$$

Ist außerdem  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{N}$  glatt, so ist die Sequenz außerdem links exakt.

### Einschub: Die Hochhebungseigenschaft für glatte Morphismen

Aus irgendeinem Grund ist mir leider nicht klar, ob glatte Morphismen von algebraischen Stacks wieder durch die Hochhebungseigenschaft charakterisiert sind. Mit Hilfe der Differentiale kann ich aber den Beweis aus [Gro67] §16.5 für Morphismen von Schemata in Stacks nachvollziehen. Es wäre schön, wenn mir jemand erklären könnte, ob mir das allgemeiner klar sein sollte.

**Definition 1.3.13** *Ein Morphismus  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt formal glatt, wenn er folgende Hochhebungseigenschaft hat: Ist  $A$  ein Ring,  $I$  ein Ideal mit  $I^2 = 0$ , so kann man jedes Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(A/I) & \xrightarrow{t_0} & \mathcal{M} \\ \downarrow & \nearrow \tau_0 & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array}$$

vervollständigen.

**Lemma 1.3.14** *Ein darstellbarer Morphismus  $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N}$  algebraischer Stacks ist genau dann glatt, wenn er formal glatt und von endlicher Präsentation ist.*

**Beweis:** Ist  $f$  formal glatt und  $X \rightarrow \mathcal{N}$  ein beliebiger Morphismus, so hat auch  $f' : X \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M} \rightarrow X$  die Hochhebungseigenschaft, denn für ein  $\text{Spec}(A) \rightarrow X$  gilt

$$\text{Hom}_X(\text{Spec}(A), X \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{N}}(\text{Spec}(A), \mathcal{M}).$$

Damit ist dann für eine Überdeckung  $X \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{N}$  auch  $f'$  als Morphismus von Schemata formal glatt und von endlicher Präsentation, also glatt.

Umgekehrt sieht man das wie folgt ein: Zur Verkürzung bezeichne  $T_0 = \text{Spec}(A/I)$  und  $T = \text{Spec}(A)$ . Sei  $\text{Lift}(t_0, \tau_0)(U)$  die Menge (das Gruppoid) der Liftungen

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(A/I) & \xrightarrow{t_0} & \mathcal{M} \\ \downarrow & \nearrow t & \downarrow f \\ \text{Spec}(A) \supset U & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array}$$

auf einer offenen Menge  $U \subset T$ , so daß die Einschränkungen von  $t$  und  $\tau$  jeweils  $t_0$  bzw.  $\tau_0$  sind. Das ist für jedes  $U$  eine Menge und definiert eine Garbe auf  $T$ , da die Morphismen  $t : U \rightarrow T \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}$  eine Garbe bilden und die gesuchten 2-Morphismen  $\tau$  für ein festes  $t$  ebenfalls.

Ist  $X \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{N}$  eine Überdeckung von  $\mathcal{N}$ , so hat man für das Diagramm nach Basiswechsel mit  $X \rightarrow \mathcal{N}$  eine analog definierte Garbe  $\text{Lift}(t_0 \times_{\mathcal{N}} X)$ , und die Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Lift}(t_0, \tau_0)(U) \longrightarrow \text{Lift}(t_0 \times_{\mathcal{N}} X)(U) \rightrightarrows \text{Lift}(t_0 \times_{\mathcal{N}} X \times_{\mathcal{N}} X)(U)$$

ist exakt. Damit bekommt man auf der Garbe  $\text{Lift}(t_0, \tau_0)$  durch Abstieg eine Struktur als  $\text{Hom}_{T_0}(t_0^* \Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}, I)$ -Torseur, wie in [EGA4] §16.5.14. Der ist trivial ([EGA4]§16.5.15), also gibt es einen Schnitt. Fertig.

**Folgerung 1.3.15** *Ist  $\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{N}$  ein formal glatter Morphismus algebraischer Stacks, mit  $f$  und  $\mathcal{M}$  lokal von endlicher Präsentation, so ist  $f$  glatt.*

**Beweis:** Ist  $x : X \xrightarrow{\text{cov}} \mathcal{M}$  eine glatte Überdeckung, so ist  $x$  nach dem Lemma formal glatt. Damit ist auch  $x \circ f$  formal glatt, also glatt, weil  $x \circ f$  ein Morphismus von einem Schema in einen algebraischen Stack und also darstellbar ist. Fertig.

## Der Tangentialstack

Das Beispiel des  $BG$  zeigt, daß man für nicht darstellbare Morphismen zunächst keine Möglichkeit hat, eine Garbe relativer Differentiale mit den üblichen Eigenschaften zu definieren: Für die Überdeckung  $S \rightarrow [S/G] = BG$  ist die Garbe der relativen Differentiale auf  $S$  das triviale Bündel vom Rang  $\dim(G)$ . Damit kann man keine Garbe auf  $BG$  finden, die in eine exakte Sequenz  $p^*(\Omega_{BG/S}) \rightarrow \Omega_{S/S} \rightarrow \Omega_{S/BG} \rightarrow 0$  passen würde.

Aber für die geometrische Realisierung der dualen Garben, die die relativen Tangentialbündel definieren, legt diese Sequenz die Definition eines relativen Tangentialstacks nahe, den Quotienten  $[\mathbb{V}(\mathcal{T}_{S/S})/\mathbb{V}(\mathcal{T}_{S/BG})]$ . Leider ist dieser für ein allgemeines Gruppoid  $(R, X)$  erstmal nur ein Stack über  $X$  und man müßte diesen durch Abstieg auf  $[X/R]$  definieren.

Leichter ist es, den Tangentialstack über die Definition von Laumon zu beschreiben, der den Tangentialstack definiert, ohne auf Differentiale zu verweisen. Der Rest des Abschnitts ist – bis auf die Beschreibung des Normalenbündels – weitgehend aus dem Preprint [Lau88] von G. Laumon übernommen.

**Notation:** Zur Verkürzung schreibe ich:  $U[\epsilon] := U \times_{\mathbb{Z}} \text{Spec}(\mathbb{Z}[\epsilon]/(\epsilon^2))$

Für ein Schema  $X/S$  hat das Tangentialbündel die universelle Eigenschaft:

Die Menge der Schnitte  $\left\{ \begin{array}{ccc} & & T_X \\ & \nearrow s & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \uparrow & & \nearrow s \\ U[\epsilon] & & \end{array} \right\}$ . Deshalb definiert Laumon:

**Definition 1.3.16** Ist  $\mathcal{M}/S$  ein algebraischer Stack, so ist der Tangentialstack  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}/S}$  an  $\mathcal{M}$  definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(U) := \mathcal{M}(U[\epsilon]),$$

und Pull-backs  $f : U \rightarrow V$  induzieren  $f[\epsilon]^* : \mathcal{M}(V[\epsilon]) \rightarrow \mathcal{M}(U[\epsilon])$ .

**Bemerkung:**

- Das ist in der Tat ein Stack, denn ist  $U \xrightarrow{\text{cov}} X$  eine Überdeckung, so ist  $U[\epsilon] \times_{X[\epsilon]} U[\epsilon] \cong (U \times_X U)[\epsilon]$ . Damit sind die Verklebedaten für Überdeckungen  $U \rightarrow X$  von  $\mathcal{T}$  auch Verklebedaten für  $U[\epsilon] \xrightarrow{\text{cov}} X[\epsilon] \rightarrow X$  von  $\mathcal{M}$ .
- Die Abbildungen  $s_0 : U \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} U[\epsilon]$  und  $\pi : U[\epsilon] \xrightarrow{p_1} U$  induzieren Abbildungen  $s_0 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ , den Nullschnitt, und  $\pi : \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ , die Projektion.
- Die gleiche Definition kann ich für jeden Morphismus von (algebraischen) Stacks hinschreiben und so den *relativen Tangentialstack*  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  definieren. Per Definition induzieren Morphismen der Stacks auch Morphismen auf den Tangentialstacks.
- Außerdem kann man wie gewohnt Vektorfelder addieren:

$$+ : \mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc} U[\epsilon] \xrightarrow{f} \mathcal{M} & U[\epsilon] \xrightarrow{g} \mathcal{M} & \\ \downarrow \swarrow \phi & \downarrow \swarrow \psi & \\ U \longrightarrow \mathcal{N} & U \longrightarrow \mathcal{N} & \end{array} , \Phi : f \circ s_0 \Rightarrow g \circ s_0 \right) \mapsto \begin{array}{ccc} U[\epsilon] \xrightarrow{(id, id)} U[\epsilon] \times_U U[\epsilon] \xrightarrow{(f, g)} \mathcal{M} & & \\ \searrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array}$$

Um  $(f, g)$  zu definieren, würde man für ein Schema  $\mathcal{M} = M$  bemerken, daß  $U[\epsilon]$  und  $U$  den gleichen topologischen Raum definieren und die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_{U[\epsilon]} = \mathcal{O}_U \oplus \epsilon \mathcal{O}_U$  ist. Dann kann man  $(f, g)$  auf dem topologischen Raum als  $f(=g)$  definieren und  $(f, g)^\# : f^* \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{O}_U \oplus \epsilon \mathcal{O}_U \oplus \epsilon' \mathcal{O}_U$  auf dem  $\epsilon, \epsilon'$  Anteil gleich der Summe von  $f^\#$  und  $g^\#$  setzen. Das kann ich hier genauso machen, wenn ich die Abbildungen auf einer Überdeckung  $\tilde{U} \rightarrow U$  zu Abbildungen in eine Präsentation von  $\mathcal{M}$  lifte.

**Lemma 1.3.17** Ist  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein darstellbarer Morphismus algebraischer Stacks, so sind die Stacks  $\mathbb{V}(\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}})$  und  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  kanonisch äquivalent<sup>11</sup>. Die Äquivalenz ist mit den Nullschnitten und Projektionen verträglich.

**Beweis:** Sind  $\mathcal{M} = M$  und  $\mathcal{N} = N$  Schemata, so ist das richtig [EGA4] §16.5. Für diesen Fall definiert man den Isomorphismus  $T_{M/N} \rightarrow \mathbb{V}(\Omega_{M/N})$  wie folgt: Ist

$$\begin{array}{ccc} U[\epsilon] & \xrightarrow{\tau} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & N \end{array}$$

<sup>11</sup>Hierbei verwende ich die Notation aus [Gro67], d. h.  $\mathbb{V}(\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}) = \text{Spec}(\text{Sym}(\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}))$ , die Schnitte des geometrischen Bündels sind also die Schnitte der Garbe  $\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}^\vee$

ein Schnitt von  $T_{M/N}(U)$ , so definiert dieser eine Derivation durch:

$$\mathcal{O}_M \xrightarrow{\tau^\sharp} \tau_*(\mathcal{O}_{U[\epsilon]}) \xrightarrow{\cong} \tau_*(\mathcal{O}_U \oplus \epsilon\mathcal{O}_U) \xrightarrow{(a, \epsilon b) \rightarrow b} \tau_*(\mathcal{O}_U)$$

Das kann man auch anders beschreiben:  $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\cong} \Omega_{U[\epsilon]/U}$  durch  $1 \rightarrow d\epsilon$ . Damit bekommt man aus dem Diagramm eine Abbildung  $\tau^*\Omega_{M/N} \rightarrow \Omega_{U[\epsilon]/U} \xrightarrow{\text{cong}} \mathcal{O}_U$ . Diese definiert den Morphismus zwischen den Bündeln.

Für die Stacks muß ich also die Existenz einer natürlichen Abbildung  $\tau^*\Omega_{M/N} \rightarrow \Omega_{U[\epsilon]/U}$  begründen. Ich habe aber:

$$\begin{array}{ccccc} U[\epsilon] & \xrightarrow{(\pi, \tau)} & U \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & \searrow \pi & \downarrow & & \downarrow \\ & & U & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array}$$

Damit sind im rechten Quadrat alle Morphismen darstellbar, weshalb der Isomorphismus  $p_1^*\Omega_{U/\mathcal{N}} \oplus p_2^*\Omega_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \rightarrow \Omega_{U \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/U}$  und der natürliche Morphismus  $(\pi, \tau)^*(\Omega_{U \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/U}) \rightarrow \Omega_{U[\epsilon]/U}$  die gewünschte Abbildung liefern. Die Behauptung, daß diese einen Isomorphismus liefert, ist lokal, falls man noch zeigen kann, daß gilt:  $\mathcal{T}_{X \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/X} \cong \mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \times_{\mathcal{N}} X$ :

$$\begin{aligned} \langle U \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \times_{\mathcal{N}} X \rangle &\longleftrightarrow \left\langle \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array} \right\rangle \longleftrightarrow \left\langle \begin{array}{ccc} U[\epsilon] & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathcal{N} \end{array} \right\rangle \\ &\longleftrightarrow \left\langle \begin{array}{ccc} U[\epsilon] & \longrightarrow & X \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array} \right\rangle \longleftrightarrow \langle U \rightarrow \mathcal{T}_{X \times_{\mathcal{N}} \mathcal{M}/X} \rangle \end{aligned}$$

Fertig.

Damit ist insbesondere gezeigt, daß  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  für darstellbare Morphismen ein algebraischer Stack ist.

**Behauptung 1.3.18** (Laumon) *Ist  $X \rightarrow \mathcal{M}$  eine Präsentation eines algebraischen Stacks  $\mathcal{M}$ , so sind die algebraischen Stacks  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}/S} \times_{\mathcal{M}} X$  und  $[\mathbb{V}(\Omega_{X/\mathcal{M}}) \times_X \mathbb{V}(\Omega_{X/S}) \xrightarrow[p_2]{+} \mathbb{V}(\Omega_{X/S})]$  isomorph.*

**Beweis:** Das Lemma zeigt, daß die Gruppoide  $[\mathbb{V}(\Omega_{X/\mathcal{M}}) \times_X \mathbb{V}(\Omega_{X/S}) \rightrightarrows \mathbb{V}(\Omega_{X/S})]$

und  $T_{X/S} \times_X T_{X/\mathcal{M}} \rightrightarrows T_{X/S}$  isomorph sind. Der Morphismus  $X \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$  induziert einen Morphismus  $T_{X/S} \xrightarrow{(D\pi, p_X)} \mathcal{T}_{\mathcal{M}/S} \times_{\mathcal{M}} X$ , der zu einem Morphismus des Quotienten absteigt, da nach Konstruktion der Morphismus  $\mathcal{T}_{X/\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}/S}$  durch den Nullschnitt von  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}/S}$  faktorisiert.

Ich kann auch ein Inverses angeben, denn:

$$(U \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \times_{\mathcal{M}} X) \longleftrightarrow \left( \begin{array}{ccc} U[\epsilon] \xrightarrow{\tau} \mathcal{M} & & U \xrightarrow{t_0} X \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathcal{N}, \quad U[\epsilon] \xrightarrow{\tau} \mathcal{M} \end{array} \right).$$

Das liefert einen Morphismus von  $U$  in den Quotienten des Gruppoids, denn nach dem Hochhebungslemma (1.3.14) kann man  $\tau$  (für affines  $U$ ) immer zu einem  $t : U[\epsilon] \rightarrow X$  liften. Die Differenz zweier Lifts  $t, t'$  liefert kanonisch einen Schnitt  $t'' : U \rightarrow T_{X/\mathcal{M}}$ . Damit bekommt man den inversen Morphismus der Stacks. Fertig.

### Normalenbündel an Unterstacks

Nun möchte ich noch die Beschreibung des Normalenbündels an glatte Unterschemata als Quotienten der Tangentialbündel auf algebraische Stacks übertragen.

Sei  $\iota : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$  eine abgeschlossene Einbettung von glatten Stacks mit Idealgarbe  $\mathcal{I}$ . Dann gilt auf einer Überdeckung  $X \xrightarrow{cov} \mathcal{M}$  mit  $Y = \mathcal{N} \times_{\mathcal{M}} X \xrightarrow{\pi_Y} \mathcal{N}$  und  $\iota_Y = \iota \times_{\mathcal{M}} X$  für das Normalenbündel  $N_{X/Y}$  an  $Y$ , daß  $N_{X/Y} = \pi_Y^* \mathbb{V}((\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee) \cong [\iota_Y^* T_X / T_Y]$ . Damit hat man ein Diagramm von algebraischen Stacks über  $Y$ :

$$\begin{array}{ccccc} Y \times_Y N_{X/Y} & \longleftarrow & \iota_Y^*(T_{X/\mathcal{M}} \times_X T_X) & \xleftarrow{\cong} & T_{Y/\mathcal{N}} \times_Y T_Y \\ \text{Id} \downarrow \downarrow \text{Id} & & + \downarrow \downarrow p_2 & & + \downarrow \downarrow p_2 \\ N_{X/Y} = \pi_Y^*(N_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}) & \longleftarrow & \iota_Y^* T_X & \longleftarrow & T_Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_Y^*(N_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}) & \xleftarrow{\tilde{p}} & \pi_Y^* \iota^*(\mathcal{T}_{\mathcal{M}}) & \longleftarrow & \pi_Y^*(\mathcal{T}_{\mathcal{N}}) \end{array}$$

Wobei ich die Pull-backs auch alle als Faserprodukte schreiben könnte. Für die beiden oberen Zeilen sind die zugehörigen Sequenzen der Garben  $\Omega_{\dots}$  exakt. Die beiden rechten Spalten sind jeweils Präsentationen der unteren Stacks. Damit wird der linke untere Morphismus induziert. Da die Abbildungen alle natürlich gegeben sind (man hat ein analoges Diagramm über  $Y \times_{\mathcal{N}} Y$ ), steigt  $\tilde{p}$  zu einem Morphismus  $t : \iota^*(\mathcal{T}_{\mathcal{M}}) \rightarrow N_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  über  $\mathcal{N}$  ab.

Bleibt zu formulieren, daß  $N_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  auch der Quotient der Tangentialbündel ist. Die Schnitte von  $\iota^* \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  über einem  $U \xrightarrow{u} \mathcal{N}$  sind Paare  $(t : U[\epsilon] \rightarrow \mathcal{M}, \phi : t \circ s_0 \Rightarrow \iota \circ u)$ , diese bilden wieder ein Gruppoid. Dann sagt das obige Diagramm, daß  $p$  lokal surjektiv ist, jeder Schnitt des Normalenbündels über  $\mathcal{N}$  kommt lokal in der glatten Topologie von einem Schnitt von  $\iota^* \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$  her. Und zwei Schnitte  $(t, \phi), (t', \phi')$  liefern genau dann den gleichen Schnitt, wenn ihre Differenz von einem Schnitt von  $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}$  induziert ist. (Das prüft man auch einfach auf einer Überdeckung  $X \rightarrow \mathcal{M}$  wie oben.)

## Kapitel 2

# Modulstack der Vektorbündel auf einer Kurve

### 2.1 Definition und einige Eigenschaften des Stacks

Sei zunächst  $S$  ein beliebiges noethersches Basisschema.

**Definition 2.1.1** Sei  $C/S$  eine projektive, flache Kurve. Dann bezeichnet  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  den Stack der Vektorbündel vom Rang  $n$  und Grad  $d$  auf  $C$ , das heißt für ein Schema  $T/S$  ist<sup>1</sup>

$$\mathcal{Vekt}_C^{n,d}(T) = \langle \text{Vektorbündel vom Rang } n \text{ und Grad } d \text{ auf } T \times C \rangle,$$

wobei die Morphismen die Isomorphismen von Vektorbündel sind.

**Bemerkung:** Da Rang und Grad einer Familie von Vektorbündeln auf den Zusammenhangskomponenten des Parameterschemas konstant sind, zerfällt der Stack aller Vektorbündel auf einer Kurve in die disjunkte Vereinigung der Stacks  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$ . Die Stacks  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  sind hingegen zusammenhängend (siehe [Fal95]).

**Behauptung 2.1.2**  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  ist ein algebraischer Stack in der glatten Topologie, mit einer Überdeckung durch ein Schema, das lokal von endlichem Typ ist.

**Beweis:** Das Quot-Schema aus [Gro60] liefert wie folgt eine Präsentation des Stacks:

Sei  $\mathcal{L}$  ein relativ  $S$  reichhaltiges Linienbündel auf  $C$ . Dann ist für jedes Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf  $C$  und  $m \gg 0$  das Bündel  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$  lokal in der Basis  $S$  von globalen Schnitten erzeugt, und  $R^1\pi_*(C, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ , wobei  $\pi : C \rightarrow S$  den Strukturmorphismus bezeichnet. Damit ist außerdem nach dem Satz über Halbstetigkeit  $\pi_*(C, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})$  lokal frei vom Rang  $N$ . Dabei ist  $N$  nach dem Satz von Riemann-Roch durch den Grad von  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$  und das Geschlecht der Kurve bestimmt.

Also ist jedes Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf  $T \times C$  lokal in  $T$  Quotient von  $p_2^*(\mathcal{L}^{\otimes -m})^N$ , via Auswahl einer Basis globaler Schnitte von  $\mathcal{E} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{\otimes m}$ . Das Unterschema von  $T$ , auf dem ein festes  $m$

<sup>1</sup>Die Eckigen Klammern  $\langle \rangle$  stehen wie vereinbart für „Die Kategorie der ...“

genügt, damit  $\mathcal{E} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{\otimes m}$  von globalen Schnitten erzeugt ist und  $H^1$  davon verschwindet, ist nach dem Halbstetigkeitssatz offen. Demnach genügt es zu zeigen, daß für festes  $m$  die Unterstacks

$$T \mapsto \left\langle \begin{array}{l} \text{Vektorbündel } \mathcal{E} \text{ vom Rang } n, \text{ Grad } d \text{ auf } T \times C, \\ \text{so daß } \mathcal{E} \otimes p_2^*(\mathcal{L}^{\otimes m}) \text{ lokal in } T \text{ von } N \text{ globalen Schnitten erzeugt ist} \end{array} \right\rangle$$

algebraisch und von endlichem Typ sind, denn diese sind ineinander enthalten, und gerade wurde nachgewiesen, daß die Inklusionen darstellbar durch offene Einbettungen sind und die Vereinigung über alle  $m$  ganz  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  überdeckt.

Grothendieck konstruiert in [Gro60] für jede kohärente Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $C$  ein Schema von endlichem Typ, das den Funktor  $T \mapsto \{\text{flache Quotientengarben von } p_2^* \mathcal{F} \text{ mit fixiertem Rang und Grad}\}$  darstellt. Ein offenes Unterschema davon stellt damit den analogen Funktor für lokal freie Garben dar. Ein offenes Unterschema davon stellt – nach Halbstetigkeit – dann die Quotienten dar, deren Raum der globalen Schnitte minimale Dimension hat.

Auf dem so erhaltenen Schema  $Gr_m \subset \text{Quot}^{\text{lok. frei, } n, d}((\mathcal{L}^{\otimes -m})^{\oplus N})$  operiert die Gruppe  $GL_N$  durch Wechsel der Basis der globalen Schnitte. Der Stack-Quotient nach dieser Operation ist der oben angegebene Unterstack von  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$ .

Fertig.

**Behauptung 2.1.3**  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  ist glatt.

**Beweis:** (aus [Fal95]). Man prüft die Hochhebungseigenschaft für glatte Morphismen:

*Behauptung:* Ist ein Vektorbündel  $\bar{\mathcal{E}}$  auf  $\text{Spec}(A/I) \times C$  mit  $I^2 = (0) \subset A$  gegeben, so kann man es zu  $\mathcal{E}$  auf  $\text{Spec}(A) \times C$  fortsetzen.

Sei  $\bar{U}_i$  eine offene affine Überdeckung von  $\text{Spec}(A/I) \times C$ , auf der es eine Trivialisierung von  $\bar{\mathcal{E}}$  gibt,  $U_i$  die zugehörige Überdeckung von  $\text{Spec}(A) \times C$ . Seien  $\bar{\beta}_{ij} \in \Gamma(\bar{U}_{ij}, GL_r)$  die Kartenwechsel von  $\bar{\mathcal{E}}$ . Die kann man zu  $\beta_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, GL_r)$  liften. Dann erhält man einen Kozykel  $\beta_{ij}\beta_{jk}\beta_{ik}^{-1} = 1 + \gamma_{ijk}$  mit  $\gamma_{ijk} \in \Gamma(U_{ijk}, \mathcal{O}_{\text{Spec}(A) \times C}^{\otimes 2}) = \Gamma(U_{ijk}, I\text{End}(\mathcal{E}))$ , wobei  $I\text{End}(\mathcal{E})$  schon eine wohldefinierte Garbe ist, da die Kozykelbedingung für  $\text{End}(\mathcal{E})$ , welches durch die  $\beta_{ij}$  konstruiert werden soll, bis auf Terme in  $I$  erfüllt ist. Auf  $U_{ijkl}$  erhält man die 2-Kozykelbedingung für die  $\gamma_{ijk}$ 's, also ein Element  $(\gamma_{ijk}) \in H^2(\text{Spec}(A) \times C, I\text{End}(\mathcal{E})) = 0$  (nach Leray-Spektralsequenz für die Projektion auf  $\text{Spec}(A)$ ). Also kann man die  $\beta_{ij}$  so abändern, daß sie ein Vektorbündel definieren. Fertig.

**Bemerkung:** Genauso sieht man auch, daß die oben konstruierte Überdeckung von  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  glatt ist, denn globale Schnitte  $\bar{s}$  eines Bündels auf  $\text{Spec}(A/I) \times C$  kann man ebenfalls liften, da Vektorbündel selbst glatt sind.

Für den Beweis ist wesentlich, daß  $C$  eine Kurve ist. Das Hindernis für das Hochhebungsproblem liegt in  $H_{\text{Zar}}^2(C, I\text{End}(\mathcal{E}))$  und verschwindet nur aus Dimensionsgründen.

### 2.1.1 Beispiel: $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d}$

Für den  $\mathbb{P}^1$  über einem Körper hat man eine Klassifikation der Vektorbündel:

**Satz 2.1.4** (Grothendieck) *Sei  $k$  ein Körper, dann ist jedes Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf  $\mathbb{P}_k^1$  von der Form:*

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_{\text{Rang}(\mathcal{E})}) \quad d_i \in \mathbb{Z}$$

*Dabei sind die  $d_i$  eindeutig bestimmt,  $\sum d_i = \text{deg}(\mathcal{E})$ .*

**Beweis:** Zum Beispiel in [Fal95].

**Bemerkung:** Da  $\text{Hom}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}(d), \mathcal{O}(e)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e - d)$  ist, gibt es genau dann globale Morphismen zwischen den Bündeln, wenn  $e \geq d$  gilt. Also sind die Summanden nicht eindeutig bestimmt, wohl aber die Unterbündel  $\bigoplus_{d_i \geq D} \mathcal{O}(d_i)$ . Damit bekommt man eine kanonische Filtrierung

$$\mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{F}_k = \mathcal{E},$$

die durch die Paare  $(\text{Rang}(\mathcal{F}_i) =: n_i, \text{Grad}(\mathcal{F}_i) =: e_i)$  der Ränge und Grade der  $\mathcal{F}_i$  charakterisiert ist. Das Datum der  $(n_i, e_i)$  ist äquivalent zur Angabe  $\text{typ} = (n_i - n_{i-1}, e_i - e_{i-1})$  der Ränge und Grade der Filtrierungsquotienten, dies nennt man *Typ der Filtrierung*.

**Lemma 2.1.5** *Ist  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel vom Rang  $n$  und Grad  $d$  auf  $T \times \mathbb{P}^1$ , wobei  $T$  lokal noethersch, dann gilt:*

1. *Die Menge*

$$T^{<\text{typ}} := \{t \in T : \mathcal{E}|_{\{t\} \times \mathbb{P}^1} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(e_i) \text{ mit } e_1 \geq \dots \geq e_n \text{ und } \sum_{i=1}^k e_i < \sum_{i=1}^k d_i \text{ für alle } k\}$$

*ist offen. Damit hat man einen offenen Unterstack  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d,<\text{typ}} \hookrightarrow \mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d}$  definiert.*

2. *Die Menge  $T^{=\text{typ}} := \{t \in T : \mathcal{E}|_{\{t\} \times \mathbb{P}^1} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(d_i)\}$  ist konstruierbar. Bezeichne mit  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d,\text{typ}}$  den zugehörigen reduzierten Unterstack.*

**Beweis:** Es ist  $\pi_1 : T \times \mathbb{P}^1 \rightarrow T$  offenbar flach und projektiv. Also sind die Funktionen:

$$t \mapsto \dim(\Gamma(\{t\} \times \mathbb{P}^1, \mathcal{E}(d)|_{\{t\} \times \mathbb{P}^1}))$$

halbstetig von oben. Damit sind die Mengen

$$\{t \in T : \mathcal{E}|_{\{t\} \times \mathbb{P}^1} \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(e_i) \text{ mit } e_1 \geq \dots \geq e_n \text{ und } \sum_{i=1}^k e_i < \sum_{i=1}^k d_i \text{ für alle } k\}$$

für jede Wahl der  $d_i$  offene Unterschemata, und die Mengen

$$\{t \in T : \mathcal{E}|_{\{t\} \times \mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(d_{\text{rang}(\mathcal{E})})\}$$

sind konstruierbar.

Fertig.

Damit hat man in  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d}$  schon eine Menge Unterstacks ausgezeichnet. Diese sind jetzt aber von besonders einfacher Form:

**Lemma 2.1.6** *Der Unterstack  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d,typ}$  von  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d}$  ist isomorph zum Stack der Vektorbündel  $\mathcal{E}$  mit einer globalen Filtrierung, die an jedem Punkt die kanonische Filtrierung durch  $\mathcal{E}|_{t \times \mathbb{P}^1} \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(d_i)^{r_i}$  induziert. Dieser Stack ist isomorph zu  $B(\text{Aut}(\bigoplus \mathcal{O}(d_i)^{r_i}))$ .*

**Beweis:**

Der Stack der Bündel mit einer globalen Filtrierung ist isomorph zu  $B(\text{Aut}(\bigoplus \mathcal{O}(d_i)^{r_i}))$ , da die Bündelautomorphismen die Filtrierung respektieren. Genauer hat man eine Abbildung  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d,typ,Filt} \rightarrow \prod_{i=1}^r BGL_{n_i}$ , die  $\mathcal{E} \mapsto (p_{1,*}(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d_i))_i$  abbildet. Diese ist der Nullschnitt des Prinzipalbündels

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^r BGL_{r_i} &\rightarrow \mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1,filtr}^{n,d} \\ (\mathcal{F}_i) &\mapsto \bigoplus p_1^* \mathcal{F}_i \otimes p_2^* \mathcal{O}(d_i). \end{aligned}$$

Die Faser ist  $\times_{d_i < d_j} \Gamma(\text{Hom}(\mathcal{O}(d_i), \mathcal{O}(d_j))) = \times \mathbb{G}_a^{d_j - d_i + 1}$ .

Der Stack  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d,typ,Filt}$  der Vektorbündel mit einer globalen Filtrierung ist also ein reduzierter Unterstack von  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d}$ , der auf Punkten isomorph zu  $\mathcal{Vekt}_{\mathbb{P}^1}^{n,d,typ}$  ist. Also sind diese beiden Unterstacks isomorph. Fertig.

Der Stack ist trotz der Klassifikation der Bündel durch den Satz von Grothendieck nicht trivial, denn die Summenzerlegung des Satzes kann innerhalb von Familien variieren:

**Beispiel:** Es gibt auf  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  vom Rang 2 und Grad 0, so daß

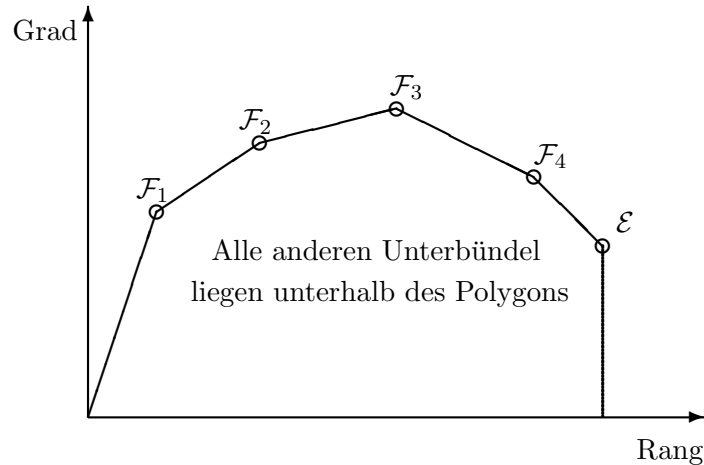
$$\mathcal{E}|_{\{0\} \times \mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1) \text{ und } \mathcal{E}|_{\{\infty\} \times \mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \text{ trivial ist.}$$

So ein Bündel kann man mit „elementaren Transformationen“ konstruieren: Man betrachtet das Bündel  $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(0)$  auf  $\mathbb{P}^1$ . Bezeichne außerdem  $k_{\{0\}}$  die Wolkenkratzergarbe, die im Punkt 0 den Halm  $k$  hat. Dann liefert der Kern jeder surjektiven Abbildung  $\phi$

$$\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(0) \xrightarrow{\phi} k_{\{0\}} \rightarrow 0$$

ein Vektorbündel  $\mathcal{K}$  vom Grad 2 auf  $\mathbb{P}^1$ . Es ist  $\mathcal{K} \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(0)$ , wenn  $\phi$  den  $\mathcal{O}(0)$ -Summanden auf 0 abbildet. Andererseits sieht man genauso, daß  $\mathcal{K} \cong \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$  ist, falls  $\phi$  auf dem  $\mathcal{O}(0)$ -Summanden nicht verschwindet. Ferner liefern skalare Vielfache von  $\phi$  kanonisch isomorphe  $\mathcal{K}$ . Also ist die Familie der Bündel, die durch den  $\mathbb{P}^1$  der Quotienten  $\phi : k^2 \rightarrow k_{\{0\}}$  parametrisiert wird, die gesuchte Familie (wenn man diese mit  $\mathcal{O}(-1)$  tensoriert).

Die Frage, wie die Unterstacks zusammenhängen, kann man auch an Lemma 2.1.5 ablesen: Ordnet man einem Bündel das konvexe Polygon mit den Ecken  $(n_i, d_i)$ , die durch Ränge und Grade der Bündel der kanonischen Filtrierung  $(\mathcal{F}_i)$  gegeben sind, zu, so sind die analogen Punkte (Rang, Grad) aller Unterbündel darin enthalten. In einer Familie kann so ein Polygon unter Spezialisierung nur größer werden:



### 2.1.2 Die analogen Ergebnisse für beliebige Kurven

Jetzt zitiere ich die analogen Ergebnisse für Vektorbündel auf Kurven (Satz 2.1.8 und Satz 2.1.9) aus [HN73] und [Sha77] und interpretiere diese wieder als Eigenschaften des Stacks. In [VP85] werden diese Sätze in der hier angegebenen Form bewiesen.

Danach wird die Struktur der Unterstacks, die durch die HN-Filtrierung gegeben sind, genauer untersucht.

**Definition 2.1.7** Sei  $C/k$  eine glatte, irreduzible projektive Kurve über einem Körper  $k$ ,  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel auf  $C$ .

Dann bezeichne  $\mu(\mathcal{E}) = \frac{\text{Grad}(\mathcal{E})}{\text{Rang}(\mathcal{E})}$  die Steigung von  $\mathcal{E}$ .

Das Vektorbündel  $\mathcal{E}$  heißt semistabil, wenn für alle echten Unterbündel  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$  gilt:

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{\text{Grad}(\mathcal{F})}{\text{Rang}(\mathcal{F})} \leq \frac{\text{Grad}(\mathcal{E})}{\text{Rang}(\mathcal{E})} = \mu(\mathcal{E})$$

Es heißt stabil, wenn sogar  $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$  für alle echten Unterbündel gilt.

**Satz 2.1.8** [HN73] Für glatte, projektive Kurven  $C/k$  hat ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf  $C$  eine eindeutige Filtrierung (HNF) durch Bündel  $\mathcal{F}_i$ , mit  $\mu(\mathcal{F}_i) > \mu(\mathcal{F}_{i+1})$  für alle  $i$ , so daß die Filtrierungsquotienten semistabile Vektorbündel sind.

Der Typ der HN-Filtrierung sei wie für den  $\mathbb{P}^1$  mit  $\text{typ} = (\text{Rang}(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i), \text{Grad}(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i))$  bezeichnet. Einem solchem Filtrierungstyp ordnet man das konvexe Polygon (HNP) mit den Ecken  $(\text{Grad}(\mathcal{F}_i), \text{Rang}(\mathcal{F}_i))$  zu.

**Satz 2.1.9** (Halbstetigkeit) [VP85] Ist  $\mathcal{E}$  ein Vektorbündel auf  $T \times C$ , so ist die Funktion, die jedem Punkt das Polygon des Filtrierungstyps der Faser zuordnet, von oben halbstetig (bezüglich der Inklusion als Halbordnung auf den Polygonen). Es gilt:

1. Die Menge  $T^{\text{typ} \geq P} = \{t \in T \mid \text{Polygon zu } \mathcal{E}|_{t \times C} \supset P\}$  ist abgeschlossen.

2. Das komplementäre Unterschema  $T^{typ \neq P}$  ist offen, und  $T^{typ=P}$  definiert ein abgeschlossenes, reduziertes Unterschema davon.

**Folgerung 2.1.10** 1. Die Stacks  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\neq\mu}$  der Vektorbündel mit einer Filtrierung vom Typ nicht größer als  $\mu$  sind offene Unterstacks von  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  und somit glatt.

2. Der Unterstack  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}$  der nicht semistabilen Vektorbündel ist ein abgeschlossener Unterstack.

3. Die Stacks  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\mu}$  der Vektorbündel mit einer Filtrierung vom Typ  $\mu$ , die an jedem Punkt die HN-Filtrierung induziert, also semistabile Filtrierungsquotienten hat, sind glatte konstruierbare Unterstacks von  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$ .

**Beweis:** Es ist nur noch zu zeigen, daß die Stacks aus (3) glatt sind, denn „offen“, „konstruierbar“ bzw. „abgeschlossen“ folgt aus der Halbstetigkeit. Dabei folgt ähnlich wie für den  $\mathbb{P}^1$ , daß man den Stack  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\mu}$  auch als offenen Unterstack des reduzierten Unterstacks  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\geq\mu}$  erhält. Bezeichne mit  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\mu,alle}$  den Stack der Vektorbündel mit einer Filtrierung vom Typ  $\mu$ . Dieser enthält nach Halbstetigkeit den Stack  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\mu}$  als offenen Unterstack. Die Glattheit von  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\mu,alle}$  folgt wie für den gesamten Stack, denn ist  $\bar{\mathcal{E}}$  ein Vektorbündel vom Typ  $\mu$  auf  $Spec(A/I) \times C$  mit  $I^2 = (0)$ , so muß man nur bemerken, daß die Vorgabe einer Filtrierung von  $\bar{\mathcal{E}}$ , einer Verkleinerung der Strukturgruppe  $GL_n$  zu einer parabolischen Untergruppe entspricht. Ein Lift  $\mathcal{E}$  auf  $Spec(A) \times C$  mit dieser Strukturgruppe ist wieder filtriert und automatisch vom gleichen Typ, denn die topologischen Räume von  $Spec(A)$  und  $Spec(A/I)$  sind die gleichen. Fertig.

Der Unterstack  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\mu}$  der Vektorbündel mit einer kanonischen Filtrierung vom Typ  $\mu$  ist für Kurven vom Geschlecht  $> 0$  nicht ganz so einfach wie für den  $\mathbb{P}^1$ . Die kanonische Filtrierung definiert einen Morphismus  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,\mu} \xrightarrow{gr_F} \times_{i=1}^l \mathcal{Vekt}_C^{n_i,d_i,ss}$ . Dieser ist nicht darstellbar, da die Bündel im allgemeinen mehr Automorphismen haben als das Produkt der Automorphismen ihrer Filtrierungsquotienten. Die Abbildung ist auch kein Bündel mit konstanter Faser, aber es gilt (siehe [AB82], Proposition 7.12 für den komplex-analytischen Fall):

**Behauptung 2.1.11** Die Abbildung  $\mathcal{Vekt}_C^{typ=\mu} \xrightarrow{gr_F} \prod_{i=1}^l \mathcal{Vekt}_C^{n_i,d_i,ss}$ , die eine Familie von Vektorbündeln vom Typ  $\mu$  auf die Filtrierungsquotienten der kanonischen Filtrierung abbildet, ist azyklisch (d. h. induziert einen Isomorphismus auf der Kohomologie) für Garben, die auf einer Präsentation von étalen Garben induziert sind.

**Beweis:** Sei  $(Gr_m^{n_i,d_i})_m \rightarrow \mathcal{Vekt}_C^{n_i,d_i}$  die Überdeckung aus 2.1.2. Betrachte dann:

$$\begin{array}{ccc} Gr_m^{Filt} & \xrightarrow{Q} & (\prod Gr_m^{n_i,d_i}) \times \mathcal{Vekt}_C^\mu \xrightarrow{p_2} \mathcal{Vekt}_C^\mu \\ & \searrow \tilde{F} & \downarrow p_1 \qquad \downarrow gr_F \\ & & \prod Gr_m^{n_i,d_i} \longrightarrow \prod \mathcal{Vekt}_C^{n_i,d_i,ss} \end{array} .$$

Dabei ist  $Gr_m^{Filt}$  das abgeschlossene Unterschema der Überdeckung von  $\mathcal{Vekt}_C^\mu$ , auf dem die Basis der globalen Schnitte von  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^m$  verträglich mit der Filtrierung ist, und  $Q$

die filtrierte Basis des Bündels auf die Quotienten abbildet. Da  $H^1$  für die betrachteten Bündel verschwindet, liefert das auch eine Basis der globalen Schnitte des Quotienten.

*Behauptung:*  $\tilde{F}$  ist glatt mit azyklischen geometrischen Fasern.

Die Abbildung ist glatt, denn man kann die Vektorbündel mit der vorgegebenen Struktur wieder liften, wenn man sie modulo einem nilpotenten Ideal gegeben hat (siehe 2.1.3). Diesmal müssen die Verklebeabbildungen nur die Filtrierung respektieren, also in einer festen parabolischen Untergruppe von  $GL_n$  liegen.

Die Faser von  $\tilde{F}$  über einem Punkt  $\text{Spec}(K)$ , der einem Bündel  $\mathcal{F}_i$  mit einer Basis globaler Schnitte  $v_{ij}$  entspricht, besteht aus dem Schema der Vektorbündel mit einem Isomorphismus der Filtrierungsquotienten zu den  $\mathcal{F}_i$ , der mit den Basen verträglich ist. Das ist durch  $\prod H^1(K \times C, \mathcal{F}_{i+k}^\vee \otimes \mathcal{F}_i) \times \prod H^0(K \times C, \mathcal{F}_{i+k}^\vee \otimes \mathcal{F}_i)$  gegeben und also isomorph zu  $\mathbb{A}_K^N$ , damit azyklisch für étale Garben.

Das gleiche gilt für die Abbildungen der Faserprodukte der Überdeckungen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightrightarrows & Gr_m^{Filt} & \times & Gr_m^{Filt} & \rightrightarrows & Gr_m^{Filt} & \longrightarrow & \mathcal{Vekt}_C^\mu \\ & & \downarrow \tilde{F}_2 & & \downarrow \tilde{F}_1 & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightrightarrows & \prod Gr_m^{n_i, d_i} & \times & Gr_m^{n_i, d_i} & \rightrightarrows & Gr_m^{n_i, d_i} & \longrightarrow & \mathcal{Vekt}_C^{n_i, d_i, ss} \end{array}$$

Damit liefert die Spektralsequenz 1.3.11, daß auch  $gr_F$  azyklisch ist.

Fertig.

Das Normalenbündel  $N_{\mathcal{Vekt}_C^\mu}$  an  $\mathcal{Vekt}_C^\mu$  kann man (nach [AB82] und [Fal95]) wie folgt beschreiben: Für das universelle Bündel  $\mathcal{E}_\mu$  vom Typ  $\mu$  auf  $\mathcal{Vekt}_C^\mu \times C$  hat man eine Sequenz

$$0 \rightarrow \text{End}_{Filt}(\mathcal{E}_\mu) \rightarrow \text{End}(\mathcal{E}_\mu) \rightarrow \text{End}'(\mathcal{E}_\mu) \rightarrow 0$$

der filtrierungserhaltenden Endomorphismen in den Endomorphismen des Bündels. Dabei ist  $H^0(C, \text{End}'(\mathcal{E})) = 0$  für alle Bündel vom Typ  $\mu$  auf  $C$ , da es keine nichttrivialen Morphismen von semistabilen Bündeln in semistabile Bündel mit kleinerer Steigung gibt. Damit ist nach dem Satz von Riemann-Roch die Dimension von  $H^1(C, \text{End}'(\mathcal{E}))$  konstant für alle  $\mathcal{E}$ , also ist  $R^1 p_*(\text{End}'(\mathcal{E}))$  ein Vektorbündel auf  $\mathcal{Vekt}_C^\mu$ .

**Behauptung 2.1.12** *Das Normalenbündel  $N_{\mathcal{Vekt}_C^\mu}$  von  $\mathcal{Vekt}_C^\mu \hookrightarrow \mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  ist kanonisch isomorph zu  $R^1 p_*(\text{End}'(\mathcal{E}_{univ}))$ .*

**Beweis:** Ist  $X \rightarrow \mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  irgend ein Vektorbündel und  $x \in X$  ein Punkt, der einem Vektorbündel  $\mathcal{E}_x$  entspricht, so hat man immer eine Kodaira-Spencer Abbildung  $T_{X,x} \rightarrow H^1(C, \text{End}(\mathcal{E}))$ : Die Elemente des Tangentialraums  $T_{X,x}$  an  $x$  sind Fortsetzungen des Punktes  $x = \text{Spec}(k) \rightarrow X$  zu  $\text{Spec}(k[\epsilon]) \rightarrow X$  mit  $\epsilon^2 = 0$ . Das entspricht einem Bündel  $\tilde{\mathcal{E}}_x$  auf  $\text{Spec}(k[\epsilon]) \times C$ . Für eine Trivialisierung von  $\tilde{\mathcal{E}}_x$  auf einer offenen Überdeckung  $U_i$  unterscheiden sich die Verklebefunktionen  $\tilde{g}_{ij}$  von  $\tilde{\mathcal{E}}_x$  von denen für  $\mathcal{E}_x$  ( $g_{ij}$ ) durch  $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \epsilon h_{ij}$ . Der Kozykel  $h_{ij}$  definiert das gesuchte Element von  $H^1(C, \text{End}(\mathcal{E}))$ . Umgekehrt definiert so auch jeder Kozykel eine Fortsetzung des Bündels auf  $k[\epsilon]$ .

Das Argument zeigt auch, daß sich der Tangentialstack  $\mathcal{T}_{X,x}$  an  $x \rightarrow \mathcal{Vekt}_C^\mu$  schon nach  $H^1(C, \text{End}_{\text{Filt.}}(\mathcal{E}_x))$  abbildet, da die  $h_{ij}$  in  $\text{End}_{\text{Filt.}}(\mathcal{E})$  liegen müssen, wenn sich die Filtrierung auf  $\tilde{\mathcal{E}}_x$  fortsetzt.

Also ist nach der allgemeinen Beschreibung des Normalenbündels an einen Unterstack als Quotient der Tangentialbündel hier das Normalenbündel an das Unterschema der Bündel vom Typ  $\mu$  das behauptete  $H^1(C, \text{End}'(\mathcal{E}))$ .

Fertig.

**Bemerkung:** Die Automorphismen der Punkte im Tangentialstack werden unter den obigen Abbildungen auf die Identität abgebildet. Für die Berechnung des Normalenbündels ist das erlaubt, weil das Normalenbündel nach Definition ein Vektorbündel ist.

## 2.2 Der Kohomologiering

### 2.2.1 Die Gysin-Sequenz für die Stratifizierung zerfällt

In diesem Abschnitt sei  $S = \text{Spec}(\bar{k})$  das Spektrum eines separabel abgeschlossenen Körpers. Dies bedeutet hier keine Einschränkung, da ich nur  $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d} \times_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Q}_l)$  berechnen möchte.

Zur Vorbereitung für die Berechnung des Kohomologierings benötige ich noch das Analogon einer weiteren Aussage aus [AB82]. Für jeden Filtrierungstyp  $\mu$  ist  $\mathcal{Vekt}_C^\mu$  ein glatter abgeschlossener Unterstack von  $(\mathcal{Vekt}_C^{n,d} - \mathcal{Vekt}_C^{\leq \mu}) =: \mathcal{Vekt}_C^{\leq \mu}$ . Also hat man für das Paar  $(\mathcal{Vekt}_C^{\leq \mu}, \mathcal{Vekt}_C^\mu)$  eine Gysin-Sequenz ([Beh93]). Die Kodimension des Unterstacks ist der Rang des Normalenbündels  $N$ , der sich nach dem Satz von Riemann-Roch für Vektorbündel auf Kurven berechnet:

$$\begin{aligned} c := \text{Rang}(N) &= \dim(H^1(C, \text{End}'(\mathcal{E}_\mu))) \\ &= -\left(\dim(H^0(C, \text{End}'(\mathcal{E}_\mu))) - \dim(H^1(C, \text{End}'(\mathcal{E}_\mu)))\right) \\ &= (g-1) \underbrace{\sum_{i < j} n_i n_j}_{\text{Rang}} - \underbrace{\sum_{i < j} n_i d_j - n_j d_i}_{\text{Grad}(\text{End}'(\mathcal{E}_\mu))}. \end{aligned}$$

**Behauptung 2.2.1** Die Gysin-Sequenz für das Paar  $(\mathcal{Vekt}_C^{\leq \mu}, \mathcal{Vekt}_C^\mu)$  zerfällt in kurze exakte Sequenzen, das heißt die Sequenz:

$$0 \rightarrow H^{*-2c}(\mathcal{Vekt}_C^\mu, \mathbb{Q}_l(c)) \xrightarrow{i_*} H^*(\mathcal{Vekt}_C^{\leq \mu}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow H^*(\mathcal{Vekt}_C^{\leq \mu}, \mathbb{Q}_l) \rightarrow 0$$

ist exakt.

**Beweis:** Ich möchte gerne den Beweis aus [AB82] übernehmen. Nach [ea77] ist für glatte Paare  $Y \xrightarrow{i} X$  die Verkettung  $i^*i_*(x) = c_r(N^\vee) \cdot x$  das cup-Produkt mit der obersten Chern-Klasse des Konormalenbündels des abgeschlossenen Unterschemas. Der Beweis benutzt nur kohomologische Reinheit und die Struktur des Kohomologierings projektiver Bündel und kann für Stacks übernommen werden.

In [AB82] wird (über  $\mathbb{C}$ ) gezeigt, daß das cup-Produkt mit  $c_r(N^\vee)$  injektiv ist. Dazu sucht man zunächst einmal Klassen, die keine Nullteiler sind. Diese konstruieren Atiyah und Bott mit einem topologischen Lemma, das ich auch für Stacks formulieren kann:

**Lemma 2.2.2** 1. Sei  $G/k$  eine algebraische Gruppe und  $H \subset G$  eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist das  $G$ -Prinzipalbündel auf  $BH$ , das durch Erweiterung der Strukturgruppe entsteht, isomorph zu  $G/H$ . Damit ist

$$\begin{array}{ccc} G/H & \longrightarrow & BH \\ \downarrow & & \downarrow \\ * = \text{Spec}(k) & \longrightarrow & BG \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm. Die Abbildung  $G/H \rightarrow BH$  korrespondiert zum  $H$ -Bündel  $G \rightarrow G/H$ .

2. Ist speziell  $H = T \subset GL_n = G$  der maximale Torus der Diagonalmatrizen und  $k = \bar{k}$ , so degeneriert die Spektralsequenz der Faserung  $BT \rightarrow BGL_n$ :

$$H^*(BGL_n, \mathbb{Q}_l) \otimes H^*(GL_n/T, \mathbb{Q}_l) \Rightarrow H^*(BT, \mathbb{Q}_l).$$

Deshalb degeneriert auch für jedes glatte Schema  $X$  von endlichem Typ über  $k$  mit einer  $GL_n$ -Operation die analoge Sequenz:

$$H^*([X/GL_n], \mathbb{Q}_l) \otimes H^*(GL_n/T, \mathbb{Q}_l) \Rightarrow H^*([X/T], \mathbb{Q}_l).$$

**Bemerkung:** Um die Spektralsequenz zu erhalten, benutze ich den folgenden Satz aus [Beh93].

**Satz 2.2.3** (Behrend) Sei  $k$  ein separabel abgeschlossener Körper,  $G/k$  eine zusammenhängende algebraische Gruppe über  $k$ , die auf einem glatten Schema  $X/k$  von endlichem Typ operiert. Sei  $\mathcal{M}/k$  ein algebraischer Stack über  $k$  und  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  ein  $G$ -Prinzipalbündel. Dann liefert die Leray-Spektralsequenz für den Morphismus  $\mathcal{P} \times_G X \rightarrow \mathcal{M}$  eine Spektralsequenz:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{M}, \mathbb{Q}_l) \otimes H^q(X, \mathbb{Q}_l) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{P} \times_G X, \mathbb{Q}_l).$$

Diesen Satz benutze ich nur aus Analogie zu [AB82]. Ich zeige jedoch auch direkt, daß es einen Isomorphismus von  $H^*([X/GL_n], \mathbb{Q}_l)$ -Moduln  $H^*([X/GL_n], \mathbb{Q}_l) \otimes H^*(GL_n/T, \mathbb{Q}_l) \cong H^*([X/T], \mathbb{Q}_l)$  gibt.

**Beweis:** Das universelle  $H$ -Prinzipalbündel auf  $BH = [*/H]$  ist  $* \rightarrow [*/H]$ . Damit ist das assoziierte  $G$ -Prinzipalbündel  $* \times_H G = G/H$ . (Dabei existiert  $G/H$  als Schema, da  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe ist.) Das zeigt die erste Behauptung.

Die Spektralsequenz  $H^*(BGL_n, \mathbb{Q}_l) \otimes H^*(GL_n/T, \mathbb{Q}_l) \Rightarrow H^*(BT, \mathbb{Q}_l)$ , die man aus obigem Satz mit erhält, muß aus Dimensionsgründen degenerieren. Es ist nämlich  $H^*(BGL_n, \mathbb{Q}_l) \cong \mathbb{Q}_l[c_1, \dots, c_n]$  mit Erzeugenden  $c_i$  im Grad  $2i$  (siehe zum Beispiel [Beh93]). Damit ist auch  $H^*(BT, \mathbb{Q}_l) \cong H^*(B\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}_l)^{\otimes n} \cong \mathbb{Q}_l[c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(n)}]$  mit Erzeugenden  $c_1^{(i)}$  im Grad 2.

Bezeichnet ferner  $B \subset GL_n$  die Borel-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, so gilt  $H^*(GL_n/T, \mathbb{Q}_l) \cong H^*(GL_n/B, \mathbb{Q}_l)$ , da die Fasern der Projektion  $GL_n/T \rightarrow GL_n/B$  azzyklisch sind. Es ist  $GL_n/B = Flag_n$  die Flaggenmannigfaltigkeit.

Die Poincaré-Reihen dieser Kohomologieringe sind

$$P_{GL_n}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \dim(H^i(BGL_n, \mathbb{Q}_l), \mathbb{Q}_l) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-t^{2i})}$$

und  $P_T(t) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1-t^2)}$ .

Diese Reihen unterscheiden sich um  $\frac{P_T(t)}{P_{GL_n}(t)} = \prod_{i=2}^n (1 + t^2 + \dots + t^{2i-2})$ , was gerade die Poincaré-Reihe von  $Flag_n$  ist.

Statt der Spektralsequenz kann man auch wieder die Struktur des Kohomologierings der Projektivierungen von Vektorbündeln benutzen, da die Flaggenmannigfaltigkeit durch

einen Turm solcher Bündel beschrieben wird. So sieht man direkt, daß  $H^*([X/G], \mathbb{Q}_l) \otimes H^*(G/T, \mathbb{Q}_l) \cong H^*([X/T], \mathbb{Q}_l)$  als  $H^*([X/G], \mathbb{Q}_l)$ -Moduln gilt.

Fertig.

Insbesondere folgt aus dem Lemma, daß die Abbildung  $H^*([X/GL_n], \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^*([X/T], \mathbb{Q}_l)$  injektiv ist.

Sei vorerst  $k = \bar{k}$  und  $c \in C(k)$ . Sei ferner  $\mathcal{L}$  ein reichhaltiges Linienbündel auf  $C$ . Betrachte speziell das Schema  $X = Gr_m^{ss}$ , das wie zu Beginn des Kapitels definiert ist durch:

$$Gr_m^{ss}(T) = \left\{ (\mathcal{E}, \phi) \left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ ein semi-stabiles V.B. vom Rang } n, \text{ Grad } d \text{ auf } T \times C \\ \text{und } \phi : \mathcal{O}_{T \times C}^N \rightarrow \mathcal{E} \otimes p_2^*(\mathcal{L})^{\otimes m} \end{array} \right. \right\}.$$

Dieses Schema überdeckt für ein festes  $m \gg 0$  den gesamten Stack der semistabilen Vektorbündel  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}$ , und der Vergiß-Morphismus nach  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}$  hat die Faser  $GL_N$ . Das Zentrum  $\mathbb{G}_m \subset GL_N$  operiert trivial auf  $Gr_m^{ss}$ , denn für  $g \in \mathbb{G}_m$  ist  $(\mathcal{E}, g \cdot \phi)$  via  $g^{-1}$  kanonisch zu  $(\mathcal{E}, \phi)$  isomorph. Also ist  $[Gr_m^{ss}/\mathbb{G}_m] \cong Gr_m^{ss} \times B\mathbb{G}_m$ . Bezeichne mit  $T/\mathbb{G}_m \cong T' \subset T$  einen komplementären Torus. Dann ist also

$$[Gr_m^{ss}/T] \cong [Gr_m^{ss}/T'] \times B\mathbb{G}_m =: \widehat{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d,ss} \times B\mathbb{G}_m.$$

Und es folgt:

**Lemma 2.2.4** *Ist  $C/k$  eine Kurve und  $k = \bar{k}$ , so hat man eine Einbettung:*

$$H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow H^*(\widehat{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d,ss}, \mathbb{Q}_l) \otimes H^*(B\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}_l) = H^*(\widehat{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d,ss}, \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{Q}_l[x].$$

Damit habe ich zu den vorbereitenden Lemmata aus [AB82] analoge Resultate für den Stack  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  und kann für die Behauptung den Beweis aus [AB82] §7 und §13 übernehmen:

Statt des Normalenbündels auf  $\mathcal{Vekt}_C^\mu$  kann ich auch die Einschränkung des Bündels  $H^1(C, \text{End}'(\mathcal{E}))$  auf  $\prod \mathcal{Vekt}_C^{n_i, d_i, ss}$  betrachten, denn die Abbildung induziert einen Isomorphismus auf der Kohomologie (Behauptung 2.1.11). Das Lemma besagt in diesem Fall, daß

$$H^*(\prod \mathcal{Vekt}_C^{n_i, d_i, ss}, \mathbb{Q}_l) \hookrightarrow \otimes_{i=1}^r H^*([Gr_{m_i}^{ss}/T'_i], \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{Q}_l[x^{(i)}]$$

injektiv ist. Auf  $\prod \mathcal{Vekt}_C^{n_i, d_i, ss} \times C$  ist  $\text{End}'(\mathcal{E}) = \otimes_{i < j} \text{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$ , wobei  $\mathcal{E}_i$  das universelle Bündel auf  $\mathcal{Vekt}_C^{n_i, d_i, ss} \times C$  bezeichnet. Zieht man  $\text{End}'(\mathcal{E})$  nach  $\prod_{i=1}^r Gr_{m_i}^{ss} \times C$  zurück, so

hat man eine Operation von  $\mathbb{G}_m^r \subset \prod_{i=1}^r GL_{N_i}$  darauf, die auf  $\text{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j)$  durch  $((t_1, \dots, t_r)$  operiert als  $t_i^{-1} t_j$ ) gegeben ist. Damit operiert der Torus genauso auf dem zurückgezogenen Normalenbündel.

Hat man allgemeiner ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  vom Rang  $n$  über einem Schema  $X$  gegeben, auf dem  $\mathbb{G}_m$  durch  $t \mapsto (t^k \cdot \_)$  operiert, und ist  $\bar{\mathcal{E}}$  das zugehörige Bündel auf dem Quotienten  $[X/\mathbb{G}_m] = X \times B\mathbb{G}_m$  nach der trivialen Operation von  $\mathbb{G}_m$  auf  $X$ , so ist  $\bar{\mathcal{E}} \cong p_1^*(\mathcal{E}) \otimes p_2^*(\mathcal{L}_{univ})^{\otimes k}$ , wobei  $\mathcal{L}_{univ}$  das universelle Linienbündel auf  $B\mathbb{G}_m$  ist. Damit ist die oberste

Chern-Klasse  $c_n(\bar{\mathcal{E}}) = 1 \otimes (kx)^n + (\dots)$ , wobei  $(\dots)$  Terme mit Künneth-Komponenten von positivem Grad in  $H^*(X)$  sind. Solche Elemente sind keine Nullteiler in  $H^*([X/\mathbb{G}_m], \mathbb{Q}_l)$ , da  $1 \otimes x$  kein Nullteiler ist. Dies kann man genauso für die Operation eines Torus durch einen Charakter einsehen.

Damit ist im speziellen Fall  $X = \prod_{i=1}^r Gr_{m_i}^{ss}$  und  $\mathcal{E} = H^1(C, \text{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j))$  die oberste Chern-Klasse von  $\mathcal{E}$  von der Form  $c_{top}(\mathcal{E}) = 1 \otimes (x_i - x_j)^{top} + (\dots) \in \otimes_{i=1}^r H^*([Gr_{m_i}^{ss}/\mathbb{G}_m], \mathbb{Q}_l) = \otimes_{i=1}^r H^*(Gr_{m_i}^{ss}, \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{Q}_l[x_i]$ . Also ist diese für das entsprechende Bündel auf  $\prod [Gr_{m_i}^{ss}/T_i]$  von der gleichen Form und insbesondere kein Nullteiler. Also war die Klasse auch kein Nullteiler in  $H^*(\prod \mathcal{Vekt}_C^{n_i, d_i}, \mathbb{Q}_l)$ . (Behauptung) Fertig.

**Einschub zu Lemma 2.2.4: Wann kann man die  $\mathbb{G}_m$ -Automorphismen von  $\mathcal{Vekt}_C^{n, d, ss}$  abspalten?**

Aus Lemma 2.2.4, wurde gerade gefolgert, daß man die globalen  $\mathbb{G}_m$ -Automorphismen der semistabilen Bündel in der Kohomologie abspalten kann. Damit stellt sich die Frage, ob dies nicht schon für den Stack möglich ist, also ob  $\mathcal{Vekt}_C^{n, d, ss}$  für ein geeignetes  $\widetilde{\mathcal{Vekt}}_C^{n, d, ss}$  isomorph zu  $\widetilde{\mathcal{Vekt}}_C^{n, d, ss} \times B\mathbb{G}_m$  ist.

Im Fall der Linienbündel ( $n = 1$ ) hat man (für beliebiges  $k$  mit  $C(k) \neq \emptyset$ ) solch einen Isomorphismus, der vom natürlichen Morphismus zur Jacobischen  $Pic^0(C)$  induziert wird. Man erhält wie folgt eine Äquivalenz von Stacks:

$$Pic^0(C)(T) = \{(\mathcal{L}, \phi) | \mathcal{L} \text{ Linienbdl. auf } T \times C, \text{deg}(\mathcal{L}|_{T \times C}) = 0 \text{ und } \phi : \mathcal{L}|_{T \times C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{T \times C}\}.$$

Damit hat man Abbildungen

$$Pic^0(C) \xrightarrow[\text{Vergiß } \phi]{s} \mathcal{Vekt}_C^{1,0},$$

wobei  $s : \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \otimes p_1^* \mathcal{L}|_{T \times C}^{-1}$  abbildet. Die Vergiß-Abbildung macht  $Pic^0$  zu einem  $\mathbb{G}_m$ -Bündel mit triviale  $\mathbb{G}_m$ -Operation über  $\mathcal{Vekt}_C^{1,0}$ . Man erhält einen Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathcal{Vekt}_C^{1,0} &\rightarrow Pic^0(C) \times B\mathbb{G}_m \\ \mathcal{L} &\mapsto (\mathcal{L} \otimes p_1^* \mathcal{L}|_{T \times C}^{-1}, \mathcal{L}|_{T \times C}). \end{aligned}$$

Für beliebigen Rang  $n$  kann man nun analog die Überdeckung  $\mathcal{Vekt}_C^{Basis} \twoheadrightarrow \mathcal{Vekt}_C^{n, d, ss}$  mit Faser  $GL_n$  betrachten, wobei  $\mathcal{Vekt}_C^{Basis}$  durch:

$$\mathcal{Vekt}_C^{Basis}(T) = \left\{ (\mathcal{E}, \phi) \left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ ein semistabiles V.B. vom Rang } n, \text{ Grad } d \text{ auf } T \times C \\ \text{und } \phi : \mathcal{E}|_{T \times \{c\}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{T \times \{c\}}^n \end{array} \right. \right\}$$

definiert ist. Dies ist ein algebraischer Raum, da semistabile Vektorbündel keine Automorphismen besitzen, die auf einem Punkt die Identität sind. Sei nämlich  $\phi$  ein Automorphismus von  $\mathcal{E}$ , dann ist  $(\phi - Id_{\mathcal{E}}) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Endomorphismus des semistabilen Bündels  $\mathcal{E}$ . Dieser faktorisiert  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$  durch ein Vektorbündel  $\mathcal{F}$ , das somit Quotient und

Unterbündel von  $\mathcal{E}$  ist. Also ist  $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E})$ . Hätte der Kokern von  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$  Torsion, so gäbe es ein Bündel  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{E}$  vom gleichem Rang wie  $\mathcal{F}$  aber größerem Grad. Für  $\mathcal{F}'$  wäre dann  $\mu(\mathcal{F}') > \mu(\mathcal{E})$ , was der Semistabilität von  $\mathcal{E}$  widerspricht.

Auf der Überdeckung  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}$  operieren die zentralen  $\mathbb{G}_m$ -Automorphismen wie im Lemma trivial, der Quotient  $[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/\mathbb{G}_m]$  ist also isomorph zu  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis} \times B\mathbb{G}_m$ . Dieser Stack läßt sich auch ganz explizit beschreiben:

$$[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/\mathbb{G}_m](T) = \left\langle (\mathcal{E}, \bar{\phi}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ ein semi-stabiles V. B. wie oben auf } T \times C \\ \text{und } \phi : \mathbb{P}(\mathcal{E}|_{T \times \{c\}}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}_{T \times \{c\}}^n \end{array} \right. \right\rangle$$

Der Isomorphismus ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis} \times B\mathbb{G}_m(T) &\rightarrow [\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/\mathbb{G}_m](T) \\ (\mathcal{E}, \phi, \mathcal{L}) &\mapsto (\mathcal{E} \otimes p_T^* \mathcal{L}, \bar{\phi} : \mathbb{P}(\mathcal{E}|_{T \times \{c\}} \otimes \mathcal{L}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}|_{T \times \{c\}}) \rightarrow \mathbb{P}_{T \times \{c\}}^n) \end{aligned}$$

gegeben.

Also ist  $[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/\mathbb{G}_m]$  ein  $PGL_n$ -Prinzipalbündel über  $[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/GL_n] \cong \mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,ss}$ . Könnte man die Produktzerlegung von  $[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/\mathbb{G}_m]$  auch für den Stack erhalten, so müßte also  $[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/GL_n] \cong [\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/PGL_n] \times B\mathbb{G}_m$  sein. Dabei operiert  $PGL_n$  tatsächlich auf  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}$ , denn die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow GL_n \rightarrow PGL_n \rightarrow 0$$

ist eine exakte Sequenz von Garben in der Zariski-Topologie. Es verwundert zunächst, daß  $PGL(T)$  operiert, obwohl die Abbildung  $GL_n(T) \rightarrow PGL_n(T)$  nicht notwendig surjektiv ist, denn man hat eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m(T) \rightarrow GL_n(T) \rightarrow PGL_n(T) \rightarrow H^1(T, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(T, GL_n).$$

Das Hindernis gegen einen Lift eines Elementes von  $PGL_n(T)$  ist also ein Linienbündel  $\mathcal{L}$  auf  $T$  mit  $\mathcal{L}^{\oplus n} \cong \mathcal{O}_T^{\oplus n}$ , deshalb kann man die Operation auch wieder explizit beschreiben<sup>2</sup>.

Um eine Produktzerlegung zu erhalten, muß man also ein Linienbündel  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}$  mit  $GL_n$ -Operation, das heißt ein Linienbündel auf  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,ss}$ , finden, so daß das Bündel  $\mathcal{E}_{univ} \otimes p_{\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}}^* \mathcal{L}$  auf  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,ss} \times C$  nach  $[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/PGL_n] \times C$  absteigt, also  $\mathbb{G}_m \subset GL_n$  auf  $\mathcal{E}_{univ} \otimes p_{\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}}^* \mathcal{L}$  trivial operiert.

**Behauptung 2.2.5** *Es gibt genau dann ein Linienbündel  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,ss}$ , so daß das Bündel  $\mathcal{E}_{univ} \otimes p_1^* \mathcal{L}$  auf  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,ss} \times C$  nach  $[\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/PGL_n] \times C$  absteigt, wenn  $n$  und  $d$  teilerfremd sind. Nur dann lassen sich die zentralen Automorphismen als  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,ss} \cong [\mathcal{V}\text{ekt}_C^{Basis}/PGL_n] \times B\mathbb{G}_m$  abspalten.*

<sup>2</sup>Das universelle Beispiel eines nichttrivialen Linienbündels  $\mathcal{L}$  mit  $\mathcal{L}^{\oplus n} \cong \mathcal{O}^{\oplus n}$  ist das Hindernis, den Morphismus  $Id_{PGL_n}$  nach  $GL_n$  zu liften. Bezeichnet  $\iota : PGL_n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n^2-1}$  die Inklusion, so kann man dieses Bündel als  $\iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n^2-1}}(1))$  beschreiben.

**Beweis:** Sind  $n$  und  $d$  teilerfremd, so kann man, wie in [Fal95] beschrieben, folgende Linienbündel auf  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}$  betrachten. Für  $m \gg 0$  ist  $p_{\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss,*}}(\mathcal{E}_{univ} \otimes p_C^*(\mathcal{O}_C(m \cdot c)))$  lokal frei vom Rang  $(d+nm)+n(1-g)$ , deshalb operieren die zentralen  $\mathbb{G}_m$ -Morphismen auf  $\mathcal{L}_1 := \det(p_{\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss,*}}(\mathcal{E}_{univ} \otimes p_C^*(\mathcal{O}_C(m \cdot c))))$  durch den Charakter  $t^{d+nm+n(1-g)}$ . Betrachtet man genauso  $\mathcal{L}_2 := \det(p_{\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss,*}}(\mathcal{E}_{univ} \otimes p_C^*(\mathcal{O}_C((m+1) \cdot c))))$ , so kann man, da  $n$  und  $d$  teilerfremd sind, ganze Zahlen  $k, l$  finden, so daß die zentralen  $\mathbb{G}_m$ -Automorphismen auf  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1^l \otimes \mathcal{L}_2^k$  durch  $t^1$  operieren. Damit operiert  $\mathbb{G}_m$  trivial auf  $\mathcal{E}_{univ} \otimes p_{\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}}^* \mathcal{L}$ . Also steigt dieses Bündel über den Morphismus  $[\mathcal{Vekt}_C^{Basis}/GL_n] \times C \rightarrow [\mathcal{Vekt}_C^{Basis}/PGL_n] \times C$  zu einem Bündel  $\tilde{\mathcal{E}}$  auf  $[\mathcal{Vekt}_C^{Basis}/PGL_n] \times C$  ab. Dies zeigt die Behauptung für  $n, d$  teilerfremd.

Seien nun  $n = n'r$  und  $d = d'r$  mit  $r = ggT(n, d) > 1$  und  $\mathcal{E}_0$  ein semistabiles Bündel vom Rang  $n'$  und Grad  $d'$  auf  $C$ . Um so ein Bündel zu erhalten, vergrößere ich notfalls den Grundkörper  $k$ . Außerdem sei  $\phi_0 : \mathcal{E}_0|_c \xrightarrow{\cong} k^{n'}$  eine fest gewählte Basis. Bezeichnet schließlich  $\mathcal{E}_{GL_r}$  das universelle Vektorbündel vom Rang  $r$  auf  $BGL_r$ , so erhält man Morphismen

$$\begin{array}{ccccc} * & \xrightarrow{(id,c)} & * \times C & \xrightarrow{(\mathcal{O}_C^r \otimes \mathcal{E}_0, id_{k^r} \otimes \phi_0)} & \mathcal{Vekt}_C^{Basis} \times C \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BGL_r & \xrightarrow{(id,c)} & BGL_r \times C & \xrightarrow{p_{BGL_r}^* \mathcal{E}_{GL_r} \otimes p_C^* \mathcal{E}_0} & \mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss} \times C. \end{array}$$

Diese Abbildungen sind alle  $GL_r$ -linear auf den zugehörigen Bündeln, wobei  $GL_r$  durch das Tensorprodukt in  $GL_n = GL_{n'r}$  eingebettet wird. Hätte man nun ein Linienbündel  $\mathcal{L}$  auf  $\mathcal{Vekt}_C^{Basis} \times C$  gefunden, auf dem  $GL_n$  so operiert, daß  $t \in \mathbb{G}_m$  als  $t^1 \cdot \_$  operiert, dann würde dies für das zurückgezogene Linienbündel  $\mathcal{L}' \cong \mathbb{A}^1$  auf  $*$  ebenso gelten. Also hätte man einen Homomorphismus  $GL_r \rightarrow \mathbb{G}_m$ , der auf dem Zentrum die Identität ist. So etwas gibt es nicht, zum Beispiel weil solch ein Homomorphismus auf dem Torus der Diagonalmatrizen durch einen Charakter operieren muß, der invariant unter Konjugation, also eine Potenz der Determinante ist. Die Determinante ist aber auf dem Zentrum nicht die Identität.

Fertig.

### 2.2.2 Die Weil-Vermutungen für $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$

**Notation:** Sind  $\mathcal{M}$  ein algebraischer Stack über  $S$  und  $U$  ein Schema über  $S$ , so bezeichne  $[\mathcal{M}(U)]$  die Menge der Isomorphieklassen von Objekten in  $\mathcal{M}(U)$ . Außerdem bezeichne  $\#\mathcal{M}(U) := \sum_{x \in [\mathcal{M}(U)]} \frac{1}{\#\text{Aut}_{\mathcal{M}(U)}(x)}$ , falls die Summe konvergiert.

**Satz 2.2.6** Seien  $C/\mathbb{F}_q$  eine glatte, geometrisch irreduzible, projektive Kurve vom Geschlecht  $g$ ,  $\alpha_i$  die Eigenwerte des Frobenius auf  $H_{\text{ét}}^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_l)$  und  $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt:

$$1. \#\mathcal{Vekt}_C^{n,d}(\mathbb{F}_q) = q^{n^2(g-1)} \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{2g} (1 - \alpha_j q^{-i})}{\prod_{i=1}^n (1 - q^{-i}) \prod_{i=2}^n (1 - q^{-i+1})}$$

2. Bezeichne  $\overline{\mathcal{V}\text{ekt}}_C^{n,d} = \mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d} \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$  und  $\Phi_q$  den arithmetischen Frobenius. Dann ist die Zetafunktion  $Z_{\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d}}(t) := \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \#\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d}(\mathbb{F}_{q^i}) \frac{t^i}{i}\right)$  eine meromorphe Funktion. Sie kann als folgendes konvergentes unendliches Produkt geschrieben werden:

$$Z(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \det(1 - \Phi_q q^{\dim(\mathcal{V}\text{ekt})} t | H_{\text{glatt}}^i(\overline{\mathcal{V}\text{ekt}}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l))^{(-1)^{i+1}}$$

3. Die Eigenwerte des Frobenius auf  $H^i(\overline{\mathcal{V}\text{ekt}}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l)$  haben den Absolutbetrag  $q^{\frac{i}{2}}$ . Deshalb kann die Poincaré-Reihe des Kohomologierings  $H_{\text{glatt}}^*(\overline{\mathcal{V}\text{ekt}}_C^{n,d})$  aus 1. und 2. abgelesen werden, sie ist:

$$P_{\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d}}(t) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + t^{2i-1})^{2g}}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{2i}) \prod_{i=2}^n (1 - t^{2i-2})}$$

**Beweis:** 1. Die Anzahl der Punkte des Stacks wird in [HN73] berechnet. Das Ergebnis wird dort nur für  $(n, d) = 1$  formuliert, allgemein werden die Bündel dort aber mit  $1/\#\text{Automorphismen}$  gezählt. Ferner werden in [HN73] der Kohomologiering der Jacobischen und die trivialen  $\mathbb{G}_m$ -Automorphismen unterdrückt, indem die Determinante der Bündel fixiert wird, es werden also nur die Bündel über einem festen Punkt der Jacobischen gezählt. (Die direkte Berechnung ohne Fixierung der Determinante wird explizit auch in [Beh87] durchgeführt.)

2. Die Produktentwicklung der Zetafunktion wird in [Beh93] allgemein für algebraische Stacks von endlichem Typ, die Quotient einer Operation einer algebraischen Gruppe sind, bewiesen und folgt aus der Lefschetz-Spurformel, die dort für diesen Fall bewiesen wird.

Nun ist  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,\mu}$  von der gewünschten Form, also gilt:

$$q^{\dim(\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,\mu})} \text{tr} \Phi_q | H^*(\overline{\mathcal{V}\text{ekt}}_C^{n,d,\mu}, \mathbb{C}) = \sum_{x \in [\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d,\mu}(\mathbb{F}_q)]} \frac{1}{\#\text{Aut}(x)}$$

Aus dem 1. Teil des Satzes folgt aber, daß die rechte Seite auch für den gesamten Stack  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d}$  konvergiert, und die Gysin-Sequenz liefert nach 2.2.1:

$$q^{\dim(\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d})} \text{tr} \Phi_q | H^*(\overline{\mathcal{V}\text{ekt}}_C^{n,d}, \mathbb{C}) = \sum_{\mu} q^{\dim(\mathcal{V}\text{ekt}_C^{\mu})} \text{tr} \Phi_q | H^*(\overline{\mathcal{V}\text{ekt}}_C^{\mu}, \mathbb{C}).$$

Damit gilt der Beweis der Produktentwicklung auch für  $\mathcal{V}\text{ekt}_C^{n,d}$ .

3. Um die Beträge der Eigenwerte des Frobenius zu bestimmen, benutze ich:

- Die Kohomologie von Quotienten nach  $\mathbb{G}_m$  (oder auch  $GL_n$ ) berechnet sich durch eine Spektralsequenz [Beh93]:

$$E_2^{p,q} = H^p(B\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}_l) \otimes H^q(X, \mathbb{Q}_l) \Rightarrow H^{p+q}([X/\mathbb{G}_m], \mathbb{Q}_l)$$

Das gilt auch, wenn  $\mathcal{M} =: [X/\mathbb{G}_m]$  ein Stack und  $X$  ein beliebiges  $\mathbb{G}_m$ -Prinzipalbündel auf  $\mathcal{M}$  ist, also  $X$  eventuell auch nur ein Stack ist.

Da für die Kohomologie von  $B\mathbb{G}_m$  die Eigenwerte des Frobenius den richtigen Absolutbetrag haben, folgt dies auch für  $[X/\mathbb{G}_m]$ , wenn auch die Eigenwerte des Frobenius auf  $X$  die gewünschten Absolutbeträge haben. (Was ich nur für triviale Bündel benutze, für die die Spektralsequenz degeneriert.)

- Da ich Aussagen über die Eigenwerte des Frobenius am leichtesten über die Weil-Vermutungen für glatte, eigentliche Schemata bekomme, suche ich Überdeckungen des Stacks, die möglichst von dieser Form sind, und versuche dann, die Kohomologie von  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  durch diese zu berechnen.

Für Vektorbündel mit Niveaustuktur zeigt [Beh87]:

**Satz 2.2.7** *Seien  $C/\mathbb{F}_q$  eine glatte, projektive Kurve,  $0 < (\Delta_i)_{i=1,\dots,k} < 1$  reelle Zahlen, die über  $\mathbb{Q}$  unabhängig sind und  $(x_i)_{i=1,\dots,k} \in C(\mathbb{F}_q)$  paarweise verschiedene Punkte. Dann gibt es für folgenden Funktor ein feines Modulschema  $M$ , das glatt und projektiv ist:*

$$X \mapsto \{(\mathcal{E}, f_i) \mid \mathcal{E} \text{ ein Vektorbündel vom Rang } n, \text{ Grad } d \text{ auf } X \times C; \\ f_i \in p_{1,*}\text{Hom}(\mathcal{E}, p_2^*(\mathcal{O}_{C,x_i}/\mathfrak{m}_{x_i}^N)^n), \text{ so daß } (\mathcal{E}, f_i) \text{ stabil ist}\} / \sim$$

Hierbei bedeutet stabil, daß für jedes Unterbündel  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  gilt:

$$\mu(\mathcal{F}) - \sum_{f_i(\mathcal{F}) \neq 0} \frac{\Delta_i}{\text{rang}(\mathcal{F})} < \mu(\mathcal{E}) - \sum_{f_i(\mathcal{E}) \neq 0} \frac{\Delta_i}{\text{rang}(\mathcal{E})}.$$

Außerdem bezeichnet „ $\sim$ “ den Übergang zu Isomorphieklassen und die Äquivalenzrelation, die  $f_i$ 's identifiziert, die sich nur um Skalare unterscheiden, das heißt für alle  $\lambda_i \in k^*$  ist  $(\mathcal{E}, f_i) \sim (\mathcal{E}, \lambda_i f_i)$ .

- Schließlich benutze ich im folgenden immer wieder Semireinheit: Seien  $\mathcal{M}$  ein glatter algebraischer Stack,  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$  ein offener Unterstack und  $\mathcal{N}$  das abgeschlossene Komplement von  $\mathcal{M}'$ . Hat  $\mathcal{N}$  die Kodimension  $\geq c$ , so gilt für  $i < 2c - 1$ , daß  $H^i(\mathcal{M}', \mathbb{Q}_l) \cong H^i(\mathcal{M}, \mathbb{Q}_l)$ . Dies folgt aus der analogen Aussage für Unterschemata und der Spektralsequenz aus Satz 1.3.11.

Betrachte nun den Stack der Vektorbündel mit Niveaustuktur:

$$\mathcal{Vekt}_C^{n,d,Niveau}(X) := \left\langle (\mathcal{E}, f_i) \mid \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ ein Vektorbündel vom Rang } n, \text{ Grad } d \text{ auf } X \times C; \\ f_i \in p_{1,*}\text{Hom}(\mathcal{E}, (\mathcal{O}_{C,x_i}/\mathfrak{m}_{x_i}^N)^n) \end{array} \right\rangle$$

Der Vergiß-Funktor liefert eine glatte Abbildung  $\pi : \mathcal{Vekt}_C^{n,d,Niveau} \rightarrow \mathcal{Vekt}_C^{n,d}$ , die den Stack  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,Niveau}$  zu einem Prinzipalbündel über  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  macht, so daß die Fasern isomorph zu  $\mathbb{A}^m$ , also azyklisch sind. Deshalb sind wie in Behauptung 2.1.11 die Kohomologieringe der beiden Stacks isomorph.

Ferner haben die Urbilder von  $\mathcal{Vekt}_C^{>\mu}$  unter  $\pi$  die gleiche Kodimension  $c(\mu)$ , wie ihre Bilder in  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$ . Insbesondere gilt  $c(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \infty$ , und damit hat man (wegen Semireinheit) wieder einen Isomorphismus der Kohomologiegruppen kleiner Dimension von  $\pi^{-1}\mathcal{Vekt}_C^{<\mu}$  und  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,Niveau}$ .

Mit dem gleichen Argument kann ich für  $N \gg 0$  nur den offenen Unterstack betrachten, auf dem alle  $f_i \neq 0$  sind, denn dessen Kodimension wird auch mit  $N$  groß. Dieses Argument funktioniert auch für den Modulraum  $M$  aus dem Satz.

Der Unterstack der stabilen Niveaustrukturen hat durch das universelle Bündel eine Abbildung in den Modulraum  $M$  aus dem Satz. Die Fasern hiervon sind über dem Unterstack, auf dem alle  $f_i \neq 0$  sind, gleich  $\mathbb{G}_m^{k-1}$ , da die Äquivalenzrelation im Satz Niveaustrukturen für äquivalent erklärt, in denen die  $(f_i)$  jeweils Vielfache voneinander sind. Der Stack der stabilen Niveaustrukturen ist also sogar ein Prinzipalbündel über  $M$ . Dieses Bündel hat aber auch einen Schnitt, indem man ein universelles Bündel mit Niveaustuktur auf  $M$  auswählt, davon gibt es  $\mathbb{G}_m^{k-1}$  äquivalente. Also ist das Prinzipalbündel trivial.

*Behauptung:* Außerdem gilt für festes  $\mu$ , daß ein Bündel mit Niveaustuktur automatisch stabil wird, wenn die Anzahl  $k$  der  $x_i$  groß genug gewählt wird und genügend viele  $f_i$  vollen Rang haben:

Sei  $\mathcal{E}$  gegeben, so daß für alle Unterbündel  $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$  gilt:  $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}) + c$ . Dann suche ich  $k, \Delta_i$ , so daß auch gilt:

$$\mu(\mathcal{F}) - \sum_{f_i(\mathcal{F}) \neq 0} \frac{\Delta_i}{\text{rang}(\mathcal{F})} < \mu(\mathcal{E}) - \sum_{f_i(\mathcal{E}) \neq 0} \frac{\Delta_i}{\text{rang}(\mathcal{E})}.$$

Ohne Einschränkung sei (wie oben) für alle  $i$  das Bild  $f_i(\mathcal{E}) \neq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{f_i(\mathcal{F}) \neq 0} \frac{\Delta_i}{\text{rang}(\mathcal{F})} - \sum_{i=1}^k \frac{\Delta_i}{\text{rang}(\mathcal{E})} &\geq \sum_{f_i(\mathcal{F}) \neq 0} \frac{\Delta_i}{\text{rang}(\mathcal{F})} - \frac{k}{n} \\ &\geq \frac{1}{n} \left( \sum_{f_i(\mathcal{F}) \neq 0} \frac{n}{n-1} \Delta_i - \frac{k}{\#\{f_i(\mathcal{F}) \neq 0\}} \right) \end{aligned}$$

Also ist für  $\Delta_i \sim 1$  der letzte Ausdruck  $\frac{1}{n}(\frac{n}{n-1} \#\{i | f_i(\mathcal{F}) \neq 0\} - k)$ . Für  $k \gg 0$  ist für  $\mathcal{F}$  mit großer Steigung  $\mu(\mathcal{F})$  aber  $f_i(\mathcal{F}) \neq 0$ , falls  $f_i$  vollen Rang hat (sonst hat der Kokern der Inklusion  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  Grad  $\geq 1$ , was nur an wenigen  $(\mu, n)$  Stellen vorkommen kann). Also wird die Differenz groß, falls weniger als  $\frac{k}{2n}$  der  $f_i$  nicht vollen Rang haben.

(*Behauptung*) Fertig.

Nun ist aber die Menge der  $f_i$  mit vollem Rang offen (und dicht) in den Morphismen  $\text{Hom}(\mathcal{E}, (\mathcal{O}_{C, x_i} / \mathfrak{m}_{x_i}^N)^n)$ . Das Komplement hat also Kodimension  $\geq 1$ . Damit hat das Komplement der Menge, auf der wenigstens  $m$  der  $f_i$  vollen Rang haben, die Kodimension  $\geq k - m$ . Also hat man für  $j$  fest,  $k \gg 0, N \gg 0$  und  $\Delta_i \sim 1$ :  $H^i(\text{Vekt}_C^{n,d, \text{Niveau}}) \cong H^i(\text{Vekt}_C^{< \mu, \text{Niveau, oft voller Rang}})$ . Dieses Argument funktioniert genauso für den Modulraum aus dem Satz, da dieser ein  $\mathbb{G}_m$ -Bündel über dem Stack ist. Für diesen Modulraum kennt man die Weil-Vermutungen, also haben die Eigenwerte des Frobenius auch der Kohomologie des Stacks der Vektorbündel mit Niveaustuktur den erhofften Absolutbetrag, also auch auf  $H^i(\text{Vekt}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l)$ , und das war zu zeigen.

Dabei habe ich benutzt, daß ich viele Punkte auf  $C$  finde. Das gilt aber sicher, wenn ich den Grundkörper  $\mathbb{F}_q$  vergrößere. Dort ist dann der Frobenius eine Potenz des ursprünglichen, also folgt die Behauptung auch wieder über dem ursprünglichen Körper.

Fertig.

### 2.2.3 Der Kohomologiering $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l)$

Für Kurven  $C/\mathbb{F}_q$  berechne ich nun den Kohomologiering des Stacks der Vektorbündel über  $C$ . Dazu geben (im komplexen Fall) Atiyah-Bott [AB82] Erzeuger an, die sich hier analog konstruieren lassen. Das universelle Bündel  $Univ_C^{n,d}$  vom Rang  $n$  und Grad  $d$  auf  $Vect_C^{n,d} \times C$  liefert einen Morphismus  $Vect_C^{n,d} \times C \rightarrow BGL_n$ , damit sind Chern-Klassen des Bündels als Urbilder der Erzeuger von  $H^*(BGL_n)$  definiert. Diese zerlegen sich nach der Künneth-Formel in

$$c_i(Univ) = c_i \otimes 1 + \sum_{k=1}^{2g} a_i^{(k)} \otimes a_C^{(k)} + b_{i-1} \otimes [P],$$

wobei  $a_C^{(k)}$  Erzeuger von  $H_{glatt}^1(C, \mathbb{Q}_l) = H_{\acute{e}tale}^1(C, \mathbb{Q}_l)$  sind, und  $[P]$  ein erzeugendes Element von  $H_{glatt}^2(C, \mathbb{Q}_l)$  ist, zum Beispiel die Fundamentalklasse eines Punktes.

**Satz 2.2.8** *Für glatte, projektive Kurven  $C/\mathbb{F}_q$  vom Geschlecht  $g$  gilt:*

$$H_{glatt}^*(\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{rang=n, deg=d}, \mathbb{Q}_l) = \mathbb{Q}_l[c_1, \dots, c_n, b_1, \dots, b_{n-1}] \otimes \bigwedge_{i=1}^n [a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(2g)}]$$

Dabei sind  $c_i, b_i$  freie Erzeuger im Grad  $2i$  und  $a_i^{(k)}$  äußere Erzeuger im Grad  $2i - 1$ .

Die Erzeuger sind als die oben beschriebenen Künneth-Komponenten der Chern-Klassen des universellen Vektorbündels auf  $\mathcal{Vekt} \times C$  gegeben.

**Bemerkung:** Die Konstruktion liefert auch die Eigenwerte des Frobenius auf den erzeugenden Elementen. Der arithmetische Frobenius operiert auf  $H^i(BGL_n, \mathbb{Q}_l)$  als  $q^{-i/2}$  (z. B. [Beh93]). Sei  $\alpha_k$  der Eigenwert auf  $a_C^{(k)}$ , dann operiert somit  $\Phi_q$  auf  $c_i$  und  $b_i$  durch  $q^{-i}$  und auf  $a_i^{(k)}$  durch  $\alpha_k^{-1} q^{-i}$ .

**Beweis:**

*Vorgehensweise:* Ich zeige zunächst, daß der Kohomologiering den behaupteten Ring enthält. Dazu muß ich noch zeigen, daß zwischen den Erzeugern keine Relationen gelten, was ich durch Induktion nach dem Rang so herausbekomme, daß ich Familien von Bündeln betrachte, deren Chern-Klassen, die die Pull-backs der universellen Klassen sind, keine Relation haben. Glücklicherweise genügen dazu Summen von Linienbündeln.

Danach folgt, da ich aus dem Abschnitt über die Weil-Vermutungen die Poincaré-Reihe des Stacks kenne, daß der Kohomologiering nicht größer sein kann.

*Sei nun Rang=1:* Die Kohomologie der Jacobischen ist zwar bekannt, trotzdem hier eine Berechnung, die ich im Prinzip genauso für höheren Rang durchführen könnte. Ich benutze dazu Linienbündel auf  $(C \times \dots \times C) \times C$ . Es gilt:

$$c_1(\mathcal{O}_{C \times C}(\Delta)) = 1 \otimes [P] + \sum_{i=1}^{2g} a^{(i)} \otimes b^{(i)} + [P] \otimes 1$$

Dabei sind  $a^{(k)}$  Erzeuger von  $H^1(C, \mathbb{Q}_l)$  und  $b^{(k)}$  die Poincaré-Dualen zu  $a^{(k)}$ .

(Denn, wie im Beweis der Lefschetz-Spurformel: Sei  $c_\Delta = c_1(\mathcal{O}_{C \times C}(\Delta)) = \sum \alpha_{kl}^{(i)} a_i^{(k)} \otimes b_i^{(l)}$  (Hier sei zur Verkürzung der Schreibweise  $a_i^k$  Erzeuger von  $H^i(C, \mathbb{Q}_l)$  und  $b_i^k$  die entsprechenden dualen für alle  $i \in \{0, 1, 2\}$ .)

Dann ist  $c_\Delta \cup b_i^k \otimes a_i^l = (-1)^i \alpha_{kl}^{(i)}$ .

Aber es gilt auch  $c_\Delta = \Delta_!(1_C)$ , und deshalb:

$$\begin{aligned} \text{Spur}_{C \times C}(c_\Delta \cup b_i^{(k)} \otimes a_i^{(l)}) &= \text{Spur}_C(\Delta^*(b_i^{(k)} \otimes a_i^{(l)})) \\ &= \text{Spur}_C(b_i^{(k)} \cup a_i^{(l)}) \\ &= (-1)^i \delta_{kl} \end{aligned}$$

Dies ergibt die behauptete Formel für  $c_\Delta$ .)

Also gilt für das Linienbündel  $\mathcal{L} = \bigotimes_{i=1}^n p_{i0}^*(\mathcal{O}_{C \times C}(\epsilon_i \Delta))$ :

$\text{Grad}(\mathcal{L}_{\text{pkt} \times C}) = \sum \epsilon_i$  und

$$c_1(\mathcal{L}) = (\sum \epsilon_i) \otimes [P] - (\sum \epsilon_i a_{(i)}^{(k)}) \otimes b^{(k)} + (\sum \epsilon_i [P]_{(i)}) \otimes 1,$$

wobei  $a_{(i)}^{(k)} = 1 \otimes \dots \otimes a^{(k)} \otimes \dots \otimes 1$  ist und die Künneth-Komponenten von  $(C \times \dots \times C) \times C$  ausgeschrieben wurden.

Daran sieht man, daß zwischen den Pullbacks der (Künneth-Komponenten der) Chern-Klassen des universellen Linienbündels auf  $\mathcal{Vekt}_C^{1,d} \times C$ , in der Kohomologie des Produkts der  $C$ 's bis zur Dimension  $* < \frac{n}{2}$  keine Relationen gelten. (Denn:  $(\sum \epsilon_i [P]_{(i)})^{n-1} = \sum (n-1)! (\prod_{j \neq i} \epsilon_j) [P] \otimes \dots \otimes \hat{i} \otimes \dots \otimes [P] \neq 0$  (gleiches Argument für die Produkte der  $a^\nu$ 's), und eine Potenz ( $< \frac{n}{2}$ ) des geraddimensionalen Erzeugers, multipliziert mit einem Monom in den äußeren Elementen ist nur dann Null, wenn mehr als  $\frac{n}{2}$  äußere Erzeuger vorkommen.)

Also gelten für  $n \rightarrow \infty$  keine weiteren Relationen zwischen den Erzeugern.

Außerdem liefert die Jacobische der Kurve (für den  $\mathbb{P}^1$  ein Punkt) eine Überdeckung des Stacks, wobei die Überlagerung durch Division nach  $\mathbb{G}_m$  gegeben ist. Damit liefert die Spektralsequenz ([Beh93])

$$H^p(B\mathbb{G}_m) \otimes H^q(J(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Vect}_C^{1,d}),$$

daß dies auch schon der ganze Kohomologiering ist, wobei im letzten Abschnitt auch schon gezeigt wurde, daß die Spektralsequenz degeneriert.

(Rang 1 fertig)

*Jetzt Induktion über den Rang der Bündel:*

Um unnötige Unübersichtlichkeit zu vermeiden, sei erstmal  $C = \mathbb{P}^1$ , womit die  $a_i$ 's verschwinden.

Betrachte auf  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d-h} \times \mathcal{Vekt}_C^{1,h} \times C$  das Bündel  $\mathcal{E} = p_{13}^*(\text{Univ}_C^{n,d-h}) \oplus p_{23}^*(\text{Univ}_C^{1,h})$ .

Dieses hat in den Fasern den Grad  $= d$  (entspricht also einer Abbildung  $f^{d-h,h} : \text{Vect}_C^{n,d-h} \times \text{Vect}_C^{1,h} \rightarrow \text{Vect}_C^{n+1,d}$ ), und die Chern-Klassen berechnen sich nach Induktion wie folgt (benutze die Künneth-Formel):

Der linke Summand hat die Chern-Klassen  $c_i(p_{13}^*(Univ_C^{n,d-h})) = c_i \otimes 1 \otimes 1 + b_{i-1} \otimes 1 \otimes [P]$  (für  $c_1$  dabei  $b_0 = d - h$ ).

Der rechte Summand hat die Chern-Klasse (nur eine)  $c_1(p_{23}^*(Univ_C^{1,h})) = 1 \otimes c_1 \otimes 1 + 1 \otimes h \otimes [P]$ .

Damit ergibt sich (Stiefel-Whitney-Formel):

$$\begin{aligned} c_i(\mathcal{E}) &= \sum c_k(p_{13}^*(Univ_C^{n,d-h})) \cup c_{i-k}(p_{23}^*(Univ_C^{1,h})) \\ &= c_i \otimes 1 \otimes 1 + c_{i-1} \otimes c_1 \otimes 1 \\ &\quad + (b_{i-1} \otimes 1 + c_{i-1} \otimes h + b_{i-2} \otimes c_1) \otimes [P] \\ c_2(\mathcal{E}) &= (c_2 \otimes 1 + c_1 \otimes c_1) \otimes 1 \\ &\quad + (b_1 \otimes 1 + c_1 \otimes h + (d-h) \otimes 1 \cdot c_1) \otimes [P] \\ c_1(\mathcal{E}) &= (c_1 \otimes 1 + 1 \otimes c_1) \otimes 1 + d \cdot 1 \otimes 1 \otimes [P] \end{aligned}$$

Das sind also die Pullbacks von den Klassen im Kohomologiering von  $\mathcal{V}ekt$  in der Kohomologie von  $\mathcal{V}ekt^{n,d-h} \times \mathcal{V}ekt^{1,h} \times C$ .

Setzt man jetzt  $h$  beliebig und betrachtet die Künneth-Komponenten der obigen Klassen, so liegen diese in  $\mathbb{Q}_l[c_n, \dots, c_1, b_{n-1}, \dots, b_1] \otimes \mathbb{Q}_l[c_1 =: x, h]$ , wobei zusätzlich der Parameter  $h$  adjungiert wurde. Man erhält also:

$dim = i$	$f^{grad-h,h,*}c_i$	$f^{grad-h,h,*}b_i$
$n+1$	$c_n x$	
$n$	$c_{n-1} x + c_n$	$b_{n-1} x + h c_n$
$n-1$	$c_{n-2} x + c_{n-1}$	$b_{n-1} + b_{n-2} x + c_{n-1} h$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2$	$c_1 x + c_2$	$b_2 + b_1 x + h c_2$
$1$	$x + c_1$	$b_1 - h x + h c_1 + d \cdot x$

Und diese sind algebraisch unabhängig.

Das kann man zum Beispiel so sehen: Betrachte zuerst nur die Elemente der linken Spalte, beginne induktiv von oben und stelle jeweils fest, daß das darunter stehende Element algebraisch unabhängig von den darüber stehenden ist (es kommt eine neue Variable hinzu), schließlich ist  $x + c_1$  algebraisch unabhängig von den Polynomen darüber: Multipliziert man in einer etwaigen Relation ein Monom aus und ordnet die entstehenden Terme nach Potenzen von  $x$ , so kann man an einem Monom  $x^N c_n^{r_n} \cdots c_1^{r_1}$  mit  $N$  maximal feststellen, wie es zustande gekommen ist: der Term  $(x + c_1)^?$  war mit Vielfachheit  $? = N - \sum r_i$  beteiligt.

Füge nun die rechte Spalte hinzu, so sind die Elemente sogar algebraisch unabhängig über  $\mathbb{Q}_l(c_n, \dots, c_1, x)$ .

Fertig ( $\mathbb{P}^1$ ).

Für  $C$  beliebig ergibt sich genauso:

Der linke Summand hat die Chern-Klassen

$$c_i(p_{13}^*(Univ_C^{n,d-h})) = c_i \otimes 1 \otimes 1 + \sum_{k=1}^{2g} a_i^{(k)} \otimes 1 \otimes a_C^{(k)} + b_{i-1} \otimes 1 \otimes [P] \quad (\text{für } c_1 \text{ dabei } b_0 = d - h).$$

Der rechte Summand hat die Chern-Klasse (nur eine)

$$c_1(p_{23}^*(Univ_C^{1,h})) = 1 \otimes c_1 \otimes 1 + \sum_{k=1}^{2g} 1 \otimes a_1^{(k)} \otimes a_C^{(k)} + 1 \otimes h \otimes [P].$$

Und damit für des gesamte Bündel:

$$\begin{aligned} c_i(\mathcal{E}) &= \sum c_k(p_{13}^*(Univ_C^{n,d-h})) \cup c_{i-k}(p_{23}^*(Univ_C^{1,h})) \\ &= c_i \otimes 1 \otimes 1 + c_{i-1} \otimes c_1 \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2g} (a_i^{(k)} \otimes 1 + c_{i-1} \otimes a_1^{(k)} + a_{i-1}^{(k)} \otimes c_1) \otimes a_C^{(k)} \\ &\quad + (b_{i-1} \otimes 1 + c_{i-1} \otimes h + b_{i-2} \otimes c_1 + \sum_{k=1}^{2g} \text{sign}(g-k+1/2) a_{i-1}^{(k)} \otimes a_1^{(2g-k)}) \otimes [P] \\ c_2(\mathcal{E}) &= (c_2 \otimes 1 + c_1 \otimes c_1) \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2g} (a_2^{(k)} \otimes 1 + c_1 \otimes a_1^{(k)} + a_1^{(k)} \otimes c_1) \otimes a_C^{(k)} \\ &\quad + (b_1 \otimes 1 + c_1 \otimes h + (d-h) \otimes 1 \cdot c_1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2g} \text{sign}((g-k+1/2) a_1^{(k)} \otimes a_1^{(2g-k)}) \otimes [P] \\ c_1(\mathcal{E}) &= (c_1 \otimes 1 + 1 \otimes c_1) \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2g} (a_1^{(k)} \otimes 1 + 1 \otimes a_1^{(k)}) \otimes a_C^{(k)} \\ &\quad + d \cdot 1 \otimes 1 \otimes [P] \end{aligned}$$

Also im Ring  $\mathbb{Q}_l[c_n, \dots, c_1, b_{n-1}, \dots, b_1] \otimes \mathbb{Q}_l[c_1 =: x, h] \otimes \wedge[a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(2g)}, \tilde{a}_1^{(1)}, \dots, \tilde{a}_1^{(2g)}]$ :

$dim = i$	$f^{grad-h,h,*} c_i$	$f^{grad-h,h,*} b_i$
$n+1$	$c_n x$	
$n$	$c_{n-1} x + c_n$	$b_{n-1} x + h c_n + \sum_k \pm a_n^{(k)} \tilde{a}_1^{(2g-k)}$
$n-1$	$c_{n-2} x + c_{n-1}$	$b_{n-1} + b_{n-2} x + c_{n-1} h + \sum_k \pm a_{n-1}^{(k)} \tilde{a}_1^{(2g-k)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2$	$c_1 x + c_2$	$b_2 + b_1 x + h c_2 + \sum_k \pm a_2^{(k)} \tilde{a}_1^{(2g-k)}$
$1$	$x + c_1$	$b_1 - h x + h c_1 + d \cdot x + \sum_k \pm a_1^{(k)} \tilde{a}_1^{(2g-k)}$

und für die Erzeuger in ungerader Dimension:

$dim$	$f^{grad-h,h,*}a_i^{(k)}$
$2n+1$	$a_n^{(k)}x + c_n\tilde{a}_1^{(k)}$
$2n-1$	$a_n^{(k)} + a_{n-1}^{(k)}x + c_{n-1}\tilde{a}_1^{(k)}$
$\vdots$	$\vdots$
$1$	$a_1^{(k)} + \tilde{a}_1^{(k)}$

Daran sieht man, daß die Erzeuger in ungeraden Graden ebenfalls unabhängig sind (denn  $a_1^{(k)} + \tilde{a}_1^{(k)}$  und  $a_1^{(k)}x + c_1\tilde{a}_1^{(k)}$  sind unabhängig). Mit dem gleichen Argument wie für den  $\mathbb{P}^1$  sieht man dies an den geraddimensionalen Erzeugern.

Da die Poincaré-Reihe des konstruierten Unterringes  $P(t) = \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{2g} (1+t^{2i-1})}{\prod_{i=1}^n (1-t^{2i}) \prod_{i=2}^n (1-t^{2i-2})}$  ist, hat man nach 2.2.2 damit schon den ganzen Kohomologiering gefunden.

Fertig.

**Folgerung 2.2.9** Für jede unendliche Teilmenge  $I \subset \mathbb{Z}$  ist die Abbildung:

$$H^*(\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{\oplus^*} \prod_{h \in I} H^*(\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{1,h} \times \overline{\mathcal{Vekt}}_C^{n-1,d-h}, \mathbb{Q}_l)$$

injektiv. Damit gilt insbesondere, daß die Restriktionen:

$$\begin{aligned} H^*(\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l) &\xrightarrow{\iota^*} H^*(\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d,\text{nicht-semistabil}}, \mathbb{Q}_l) \\ \text{und } H^*(\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l) &\xrightarrow{\iota^*} H^*(\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{n,d,>\mu}, \mathbb{Q}_l) \end{aligned}$$

injektiv sind.

**Beweis:** Die Testbündel aus dem Beweis des Satzes sind alle auf  $\overline{\mathcal{Vekt}}_C^{1,h} \times \overline{\mathcal{Vekt}}_C^{n-1,d-h}$  gegeben. Um Relationen zwischen den Erzeugern auszuschließen, genügt es, irgend eine unendliche Menge von  $h$ 's zu betrachten. Fertig.

## 2.3 Der Modulraum der semistabilen Bündel

Sind  $n$  und  $d$  teilerfremd, so sind alle semistabilen Bündel stabil deshalb gibt es in diesem Fall ein projektives Modulschema für stabile Bündel. Hierbei geht man meist weiter zum Modulraum der Vektorbündel mit fixierter Determinante über, das heißt man betrachtet die Fasern der Abbildung  $det : \mathcal{Vekt}_C^{n,d} \rightarrow \mathcal{Vekt}_C^{1,d}$ . Diese Abbildung liefert im analytischen Fall eine Faserung, die für rationale Koeffizienten kohomologisch trivial ist (siehe [AB82]). Damit kann man aus der Kohomologie des Modulstacks der stabilen Bündel auch die Kohomologie der Modulschemata der stabilen Bündel bzw. der stabilen Bündel mit fixierter Determinante ablesen.

Sind  $n$  und  $d$  nicht teilerfremd, so findet man kein Modulschema für alle semistabilen Bündel, aber man kann, genau wie oben, weiterhin die Stacks der Bündel mit fixierter

Determinante betrachten. Wie im obigen Fall erhält man für die analytischen Modulstacks aus der Determinantenabbildung wieder eine Faserung, die für rationale Kohomologie trivial ist.

Seien jetzt  $n$  und  $d$  beliebig. Die Inklusion  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss} \hookrightarrow \mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  induziert nach der Gysin-Sequenz eine Surjektion auf der Kohomologie. Damit stellt sich die Frage nach den Relationen der Erzeuger in der Kohomologie des Stacks der semistabilen Bündel.

Nach den Aussagen über die Gysin-Sequenz für die Stratifizierung von  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  ist auch im algebraischen Kontext klar, daß sich die Kohomologie der Jacobischen aus den Relationen abspalten läßt, das heißt ist mit  $a \in H^1(\mathcal{Vekt}_C^{1,d}, \mathbb{Q}_l)$  und  $x \in H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l)$  das Produkt  $\det^*(a)x$  eine Relation in  $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}, \mathbb{Q}_l)$ , so gibt es ein  $\tilde{x} \in H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l)$  mit  $\det^*(a) \cdot (\tilde{x} - x) = 0$ , so daß  $\tilde{x}$  in  $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}, \mathbb{Q}_l)$  verschwindet. Diese Aussage folgt aus der Bemerkung, daß die Chernklassen der Normalenbündel an die Strata der instabilen Bündel keine Nullteiler sind.

Wie in der Einleitung bemerkt, hatte ich längere Zeit versucht, die Relationen im Fall  $n = 2$  selbst zu bestimmen, dabei aber einen dummen Fehler gemacht. Nachdem ich dies bemerkt hatte, habe ich nun die Arbeiten von Zagier, Thaddeus und Kirwan ([Zag95],[Tha92],[Kir92]) genauer angeschaut, in denen Mumfords Vermutung im Fall  $n = 2$  und  $d$  ungerade bewiesen wird. Bei der Arbeit von Kirwan fällt auf, daß man, da man nach obiger Bemerkung die Kohomologie der Jacobischen immer aus den Relationen abspalten kann, den Beweis sofort für den Fall  $d$  gerade verallgemeinern kann, wenn man statt des groben Modulraums der semistabilen Bündel den Stack der semistabilen Bündel betrachtet. Das ist insofern interessant, als für  $n > 2$  dieser Stack als Randstratum auftaucht.

Zur Konstruktion der von Mumford angegebenen Relationen bemerkt man zunächst, daß für ein Linienbündel  $\mathcal{L}$  vom Grad  $d_0$  auf  $C$  das Tensorprodukt mit  $\mathcal{L}$  einen Isomorphismus  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Vekt}_C^{n,d+nd_0}$  induziert, weshalb man sich auf den Fall  $n(2g-2) < d \leq n(2g-1)$  beschränken kann. Dann gilt nach Serre-Dualität für jedes semistabile Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf  $C$ , daß  $H^1(C, \mathcal{E}) = 0$  ist.

Sei nun  $Univ_C^{n,d}$  das universelle Bündel auf  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d} \times C$  und  $\pi : \mathcal{Vekt}_C^{n,d} \times C \rightarrow \mathcal{Vekt}_C^{n,d}$  die Projektion, dann ist also  $\pi_*(Univ_C^{n,d})$  eingeschränkt auf  $\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}$  lokal frei vom Rang  $d + n(1 - g)$  und  $R^i \pi_*(Univ_C^{n,d,ss}) = 0$  für  $i > 0$ . Insbesondere verschwinden also für  $i > d + n(1 - g)$  die Chernklassen  $c_i(\pi_*(Univ_C^{n,d,ss}))$ . Diese kann man nun aber nach dem Satz von Riemann Roch aus  $ch(\pi_!(Univ_C^{n,d})) = \pi_*(ch(Univ_C^{n,d})(1 - (g-1)[P]))$  berechnen. Schreibt man also  $c_i(\pi_*(Univ_C^{n,d}))$  als Polynom in den Erzeugern von  $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d}, \mathbb{Q}_l)$ , so liefern die Koeffizienten der Produkte von  $a_1^{(k)}$  Relationen in  $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{n,d,ss}, \mathbb{Q}_l)$ .

**Satz 2.3.1** (*Mumfords Vermutung für Rang 2 und beliebigen Grad*) Für Rang  $n = 2$  und  $d$  beliebig erzeugen die oben beschriebenen Relationen alle Relationen in  $H^*(\mathcal{Vekt}_C^{2,d,ss}, \mathbb{Q}_l)$ .

**Beweis:(Kirwan)** Der Beweis, den Kirwan für den Fall  $d$  ungerade angibt, läßt sich unmittelbar für  $d$  gerade umformulieren, dabei werden die Formeln sogar symmetrischer. Die Beweisidee ist zu prüfen, daß die Relationen eingeschränkt auf die instabilen Strata  $\mu = (d_1, d-d_1)$  jeweils das Ideal der obersten Chernklasse des Normalenbündels enthalten. Dann ist nach Folgerung 2.2.9 und der Gysin-Sequenz klar, daß man schon alle Relationen

gefunden hat. Um dies nachzuweisen muß man also nach der Beschreibung des Normalenbündels auf  $\mathcal{Vekt}_C^{1,d_1} \times \mathcal{Vekt}_C^{1,d-d_1}$  die Cherncharaktere  $ch(\pi_!(Univ_C^{1,d_1} \oplus Univ_C^{1,d-d_1}))$  und  $ch(\pi_!((Univ_C^{1,d_1})^\vee \otimes Univ_C^{1,d-d_1}))$  vergleichen. Dies wird in [Kir92] durchgeführt, mit ganz analogen Umformungen kann man dies auch für  $d$  gerade übernehmen. Fertig.

## Anhang A

# Algebraische Räume

Um eine äquivalente Beschreibung von algebraischen Stacks und Gruppoiden zu erhalten, benutzt man algebraische Räume. Diese Objekte werden in [Knu71] ausführlich beschrieben. Es genügt hier die Definition: Algebraische Räume sind algebraische Stacks, die sogar Garben von Mengen sind, genauer:

**Definition A.0.2** *Ein algebraischer Raum ist eine Garbe  $\mathcal{F}$  von Mengen auf  $Sch/S, \acute{e}tale$ , den Schemata über  $S$  mit der étalen Topologie, so daß gilt:*

1. *Für alle Schemata  $X, Y$  mit Abbildungen  $\underline{X} \xrightarrow{x} \mathcal{F}$ ,  $\underline{Y} \xrightarrow{y} \mathcal{F}$  ist die Garbe  $\underline{X} \times_{\mathcal{F}} \underline{Y}$  darstellbar durch ein Schema  $X \times_{\mathcal{F}} Y$ .*
2. *Es gibt eine étale, surjektive Abbildung eines Schemas  $X \xrightarrow{x} \mathcal{F}$ , das heißt für alle  $\underline{Y} \xrightarrow{y} \mathcal{F}$  ist die Projektion  $X \times_{\mathcal{F}} Y \rightarrow Y$  surjektiv und étale.*

*Ein algebraischer Raum heißt separiert, wenn für eine Überdeckung wie in 2. die Abbildung  $\Delta : X \times_{\mathcal{F}} X \rightarrow X \times X$  eine abgeschlossene Einbettung ist.*

**Bemerkung:** Die Bedingung (1.) folgt wegen effektiven Abstiegs für Einbettungen aus der Bedingung (2.).

Da in den Beispielen, die ich betrachte, die darstellbaren Morphismen algebraischer Stacks immer durch Schemata darstellbar sind, kann man hier den Zwischenschritt über die algebraischen Räume überspringen. Deshalb verweise ich für Details über algebraische Räume auf [Knu71].

# Literaturverzeichnis

- [AB82] M. F. Atiyah and R. Bott. The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A 308:523–615, 1982.
- [Art74] M. Artin. Versal deformations and algebraic stacks. *Invent. Math.*, 27:165–189, 1974.
- [Beh87] Kai A. Behrend. Modulräume für Vektorbündel mit Niveaustrukturen auf algebraischen Kurven. Master’s thesis, Universität Bonn, 1987.
- [Beh93] Kai A. Behrend. The Lefschetz Trace Formula for Algebraic Stacks. *Inventiones Mathematicae*, 112:127–149, 1993.
- [DG70] M. Demazure and A. Grothendieck. *Propriétés Générales des Schémas en Groupes*, SGA 3 Tome I, volume 151 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.
- [DM69] P. Deligne and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publ. Math. IHES*, 36:75–109, 1969.
- [ea77] A. Grothendieck et al. *Cohomologie l-adique et Fonctions L*, volume 589 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1977.
- [Fal95] G. Faltings. Lectures on Vector Bundles on Curves. Notes by Michael Stoll, erhältlich via <ftp://www.rhein.iam.uni-bonn.de/usr/michael/faltall.dvi.gz>, 1995.
- [FC90] Gerd Faltings and Ching-Li Chai. *Degeneration of Abelian Varieties*. Springer-Verlag, 1990.
- [Fri82] Eric M. Friedlander. *Etale Homotopy of Simplicial Schemes*. Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1982.
- [Gro60] Alexander Grothendieck. Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. *Séminaire Bourbaki*, 13(221), 1960.
- [Gro67] Alexander Grothendieck. Eléments de Géométrie Algébrique IV. *Publ. Math. IHES*, 20, 24, 28, 32, 1964, 1965, 1966, 1967.
- [Gro84] A. Grothendieck. Esquisse d’un programme. Unpublished manuscript, 1984.
- [HN73] G. Harder and M. S. Narasimhan. On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves. *Math. Ann.*, 212:215–248, 1973.

- [Kir92] F. Kirwan. The cohomology rings of moduli spaces of bundles over riemann surfaces. *Journal of the AMS*, 5(4), 1992.
- [Knu71] D. Knutson. *Algebraic Spaces*, volume 203 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.
- [Lau88] G. Laumon. Champs Algébriques. Orsay Preprint 88-33, 1988.
- [MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric Invariant Theory*. Springer-Verlag, 3 edition, 1994.
- [Sha77] Stephen S. Shatz. The Decomposition and Specialization of Algebraic Families of Vector Bundles. *Composito Mathematica*, 35:163–187, 1977.
- [Tha92] M. Thaddeus. Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles. *Journal of Differential Geometry*, 35:131–149, 1992.
- [VP85] Jean-Louis Verdier and Joseph Le Portier. *Module Des Fibrés Stables Sur Les Courbes Algébriques*. Birkh user, 1985.
- [Zag95] D. Zagier. On the cohomology of moduli spaces of rank two vector bunles over curves. In G. van der Geer R. Dijkgraaf, C. Faber, editor, *The moduli space of curves*. Birkh user, 1995.